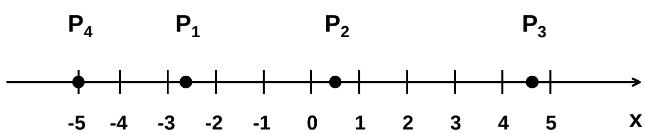
SISTEMAS DE COORDENADAS Y CONCEPTOS BÁSICOS

UNIDAD IV

IV. 1 SISTEMA COORDENADO UNIDIMENSIONAL

Existe una correspondencia biyectiva o biunívoca entre el conjunto de los números reales y el de los puntos de una recta. A esta recta que tiene un origen, un sentido y en donde se pueden ubicar todos los números reales se le conoce como *sistema coordenado unidimensional*. Gráficamente esto es:



La notación habitual para localizar un punto es: $P(x)$. Por ejemplo, para ubicar los puntos $P_1(-2.6), P_2(0.5), P_3(4.7), P_4(-5)$, simplemente se localiza su respectivo valor en la numeración y se le marca.

Se define como *abscisa* de un punto a la distancia del origen al punto en magnitud y signo.

La *distancia dirigida* (dd) que existe de un punto P_1 a un P_2 viene dada por el valor final menos el inicial: $dd = P_2 - P_1$.

La *distancia* (d) entre dos puntos P_1 y P_2 está dada por el valor final menos el inicial pero en valor absoluto, esto es: $d = |P_2 - P_1|$.

Es decir, la diferencia que existe entre distancia dirigida y distancia entre dos puntos es que en la primera se toma en cuenta el signo y su magnitud, y en la segunda sólo se toma su magnitud. Se mide en unidades (u).

Ejemplo.
Encontrar la distancia dirigida y la distancia entre los siguientes pares de puntos:

1) $P_1(3)$ y $P_2(-6)$
Solución:
$dd = -6 - 3 = -9u.$ y $d = |-6-3| = |-9| = 9u.$

2) $P_1(-\pi)$ y $P_2\left(-\frac{35}{6}\right)$

Solución:

$-\pi \approx -3.14159$ y $-\frac{35}{6} \approx 5.8333$

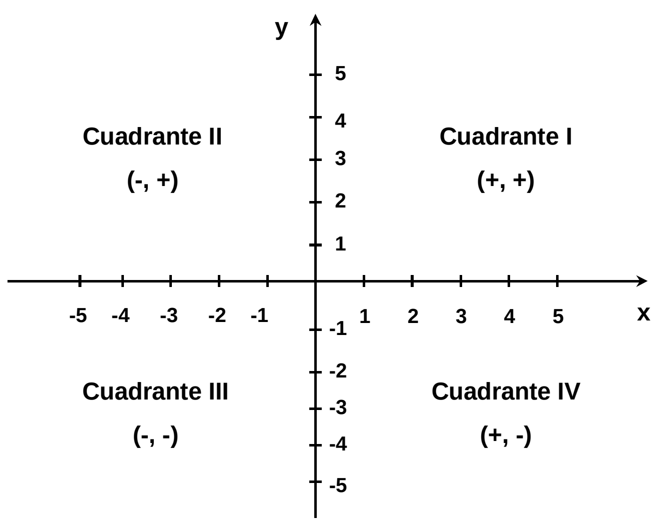
$dd = -5.8333 - (-3.14159) = -2.69u.$

$d = \left|-5.8333 - (-3.14159)\right| = \left|-2.69\right| = 2.69\ u.$

IV. 2 SISTEMA COORDENADO BIDIMENSIONAL

Es un sistema formado por dos ejes numéricos perpendiculares donde su origen es el punto en que se cruzan.

Se genera estableciendo una correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y los elementos de todas las parejas ordenadas de números reales. Esto quiere decir que se genera un plano a partir de una infinidad de puntos.

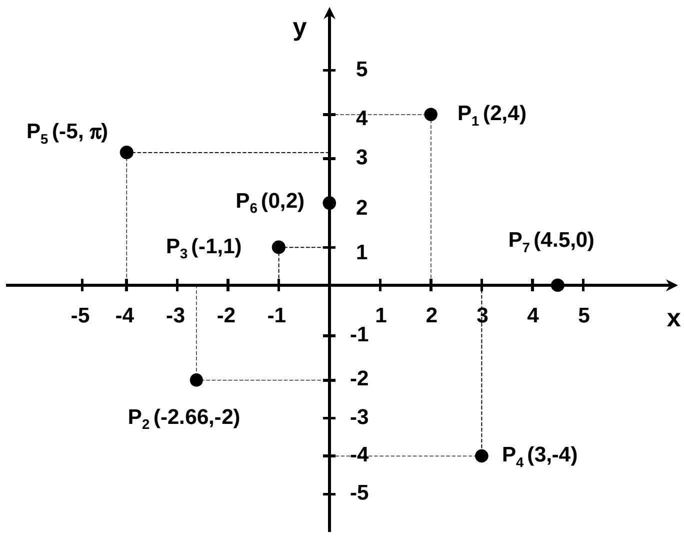


Se forman cuatro regiones llamadas cuadrantes.
El eje horizontal (x) recibe el nombre de eje de las *abscisas*.
El eje vertical (y) recibe el nombre de eje de las *ordenadas*.
Para ubicar un punto en el plano se utiliza la siguiente notación: $P(x,y)$

Ejemplo.
Ubicar los siguientes parejas ordenadas en el plano:

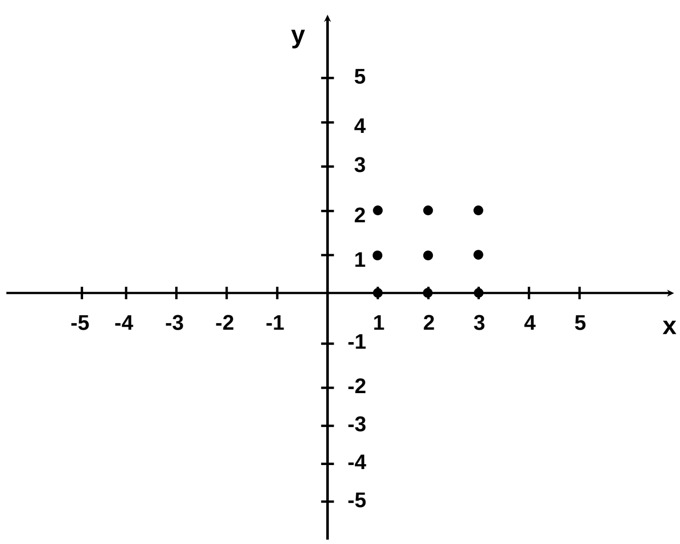
$$P_1(2,4), P_2\left(-\frac{8}{3},-2\right), P_3(-1,1), P_4(3,-4), P_5(-5,\pi), P_6(0,2), P_7(4.5,0)$$

Solución:

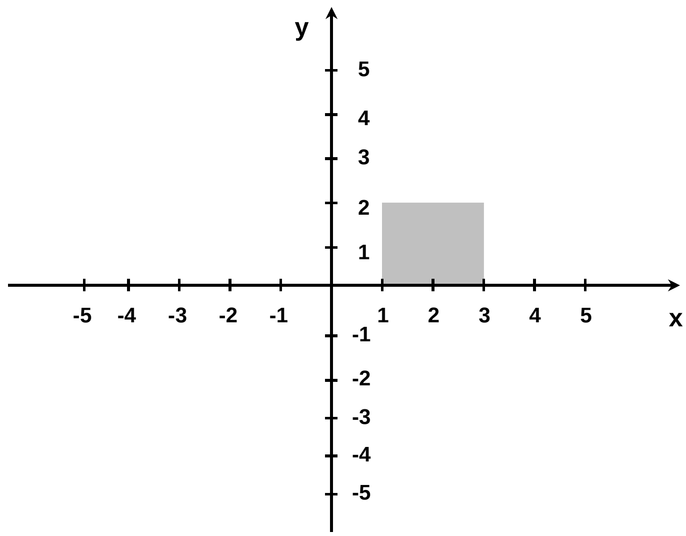


Ejemplos.
Dados los siguientes conjuntos, obtener el producto cartesiano correspondiente:

1) $A=\{1,2,3\},\ B=\{0,1,2\}$
Solución.
El conjunto solución a este producto cartesiano son nueve puntos discretos formado por las parejas ordenadas. $A\times B=\{(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}$
Gráficamente esto es:



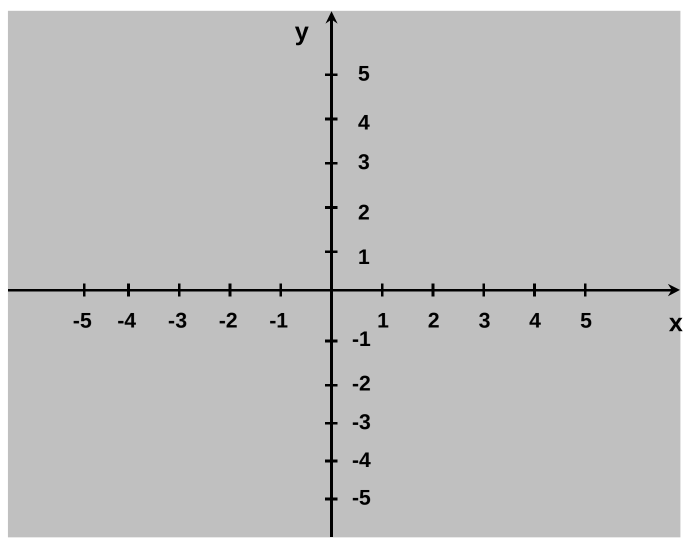
2) $A=\{x \mid 1\le x\le 3,\quad x\in \mathbf{R}\},\ =B=\{y \mid 0\le x\le 2,\quad y\in \mathbf{R}\}$
Solución.
El conjunto solución a este producto cartesiano es una superficie plana de forma rectangular limitada tanto en x como en y. Gráficamente esto es:



3) $A=\{x \mid x\in \mathbf{R}\}, \ = B=\{y \mid y\in \mathbf{R}\}$

Solución.

El conjunto solución a este producto cartesiano es una superficie plana ilimitada tanto en x como en y. Gráficamente esto es:

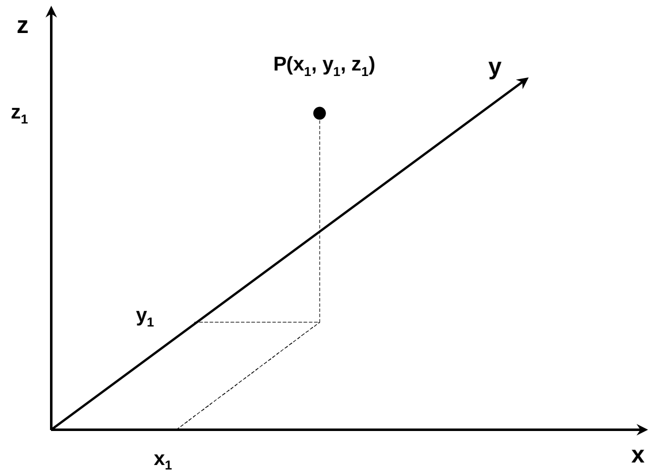


Como puede deducirse, el sistema coordenado bidimensional está constituido por el producto cartesiano de los números reales (en x) por los números reales (en y), es decir, $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

IV. 3 SISTEMA COORDENADO TRIDIMENSIONAL

Es un sistema formado por tres ejes numéricos perpendiculares donde su origen es el punto en que se cruzan.

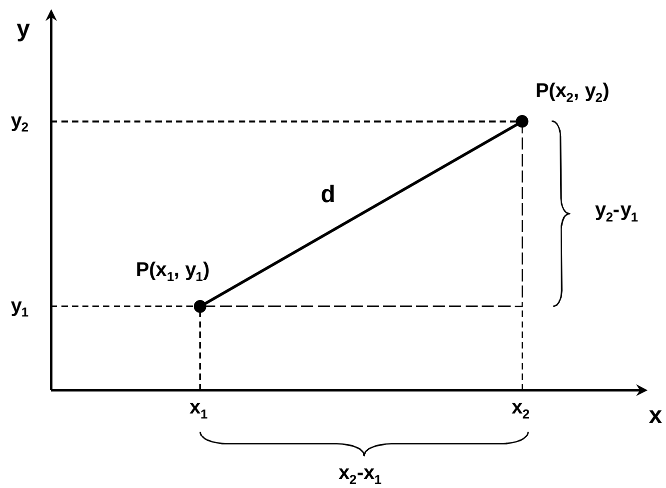
Se forma estableciendo una correspondencia biunívoca entre los puntos de un espacio y los elementos de todas las ternas ordenadas de números reales. Esto quiere decir que se genera un volumen a partir de una infinidad de puntos.



Se forman ocho regiones llamadas octantes.
El eje x recibe el nombre de eje de las *abscisas*.
El eje y recibe el nombre de eje de las *ordenadas*.
El eje z recibe el nombre de eje de las *cotas*.
Para ubicar un punto en el espacio se utiliza la siguiente notación: $P(x, y, z)$, es decir de forma similar que en un plano.

IV. 4 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera en el plano:



Al formarse un triángulo, se observa que los catetos son las diferencias de ordenadas y de abscisas. Ahora, recordando el teorema de Pitágoras expuesto en la unidad II: $c^2 = a^2 + b^2$ y aplicándolo se tiene:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

despejando d se obtiene la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplos.
Obtener la distancia entre los siguientes pares de puntos:

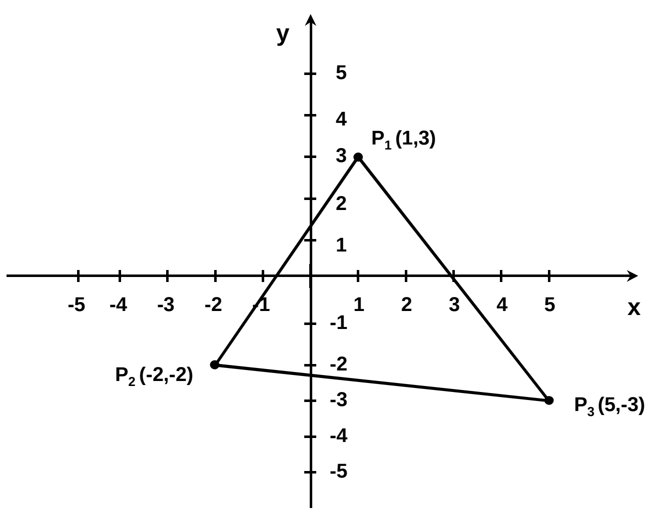
1) $P_1(4,-5)$ y $P_2(7,-1)$
Solución.
$d = \sqrt{(7-4)^2 + (-1-(-5))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\,u.$

2) $P_1(-6,-11)$ y $P_2(1,13)$
Solución.
$d = \sqrt{(1-(-6))^2 + (13-(-11))^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25\,u.$

3) $P_1\left(\frac{1}{4},-\frac{7}{4}\right)$ y $P_2\left(-\frac{3}{8},-\frac{15}{8}\right)$
Solución.
$d = \sqrt{\left(-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{15}{8}-\left(-\frac{7}{4}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{5}{8}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{64}+\frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{26}{64}} = \frac{\sqrt{26}}{8}\,u.$

4) $P_1\left(\sqrt{2},\pi\right)$ y $P_2\left(-\sqrt{5},-0.170\right)$
Solución.
Utilizando tres cifras decimales:
$d = \sqrt{(-2.236-1.414)^2 + (-0.170-3.141)^2} = \sqrt{(-3.676)^2 + (-3.311)^2} = \sqrt{13.512+10.962}$
$= \sqrt{24.474} \approx 4.947\,u.$

Ejemplo.
Si los puntos $P_1(-2,-2)$, $P_2(1,3)$ y $P_3(5,-3)$ son los vértices de un triángulo, obtener su perímetro.



la distancia entre P_1 y P_2 es: $d_1 = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

la distancia entre P_1 y P_3 es: $d_2 = \sqrt{(5-1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

la distancia entre P_2 y P_3 es: $d_3 = \sqrt{(5-(-2))^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Por tanto, el perímetro viene dado por la suma de sus tres lados:

$P = d_1 + d_2 + d_3 = \sqrt{34} + \sqrt{52} + \sqrt{50} \approx 5.83 + 7.21 + 7.07 \approx 20.11\,u.$

Ejemplo.

Sea el punto $P_1(4,-3)$ y el punto $P_2(x,10)$, obtener la abscisa de P_2 de tal manera que la distancia que los separe sea 15 unidades.

Solución.

Sustituyendo los datos en la fórmula se tiene:

$15 = \sqrt{(x-4)^2 + (10-(-3))^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 13^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 169}$

despejando x se tendrán dos soluciones de x_2:

$15^2 = (x-4)^2 + 169 \;\Rightarrow\; 225 - 169 = (x-4)^2 = 56 \;\Rightarrow\; x - 4 = \pm\sqrt{56}$

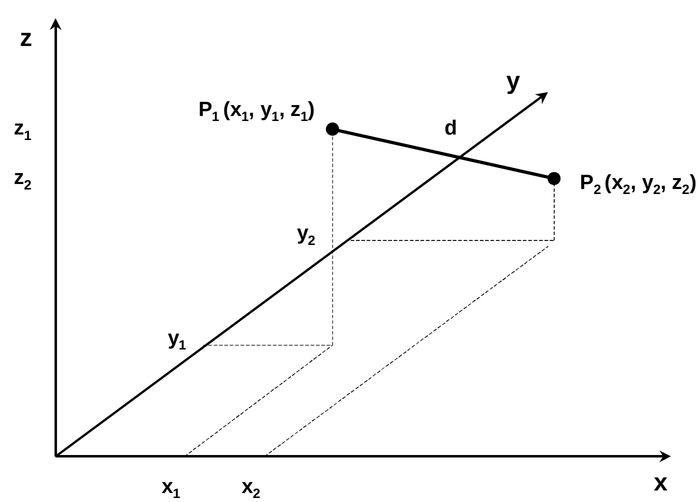
$x_1 \approx 11.48$ y $x_2 \approx -3.48$, por lo que los puntos buscados son aproximadamente:

$P_1(11.48,10)$ y el punto $P_1(-3.48,10)$

En el espacio, la fórmula de distancia entre dos puntos se deduce de forma similar que en dos dimensiones, considerando que la distancia es un segmento de recta que pertenece a un plano. Esto es, si se tienen los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, la distancia que los separa es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Gráficamente, es:



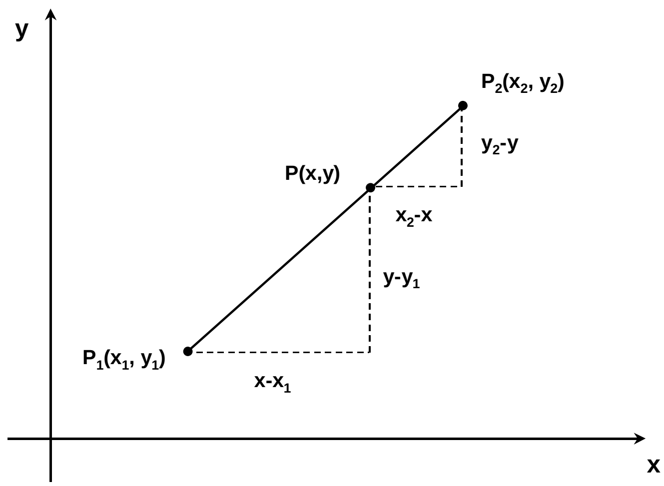
Ejemplo.
Obtener la distancia entre los puntos: $P_1(2,-7,5)$ y $P_2(-8,-11,2)$

Solución.
$$d=\sqrt{(-8-2)^2+(-11-(-7))^2+(2-5)^2}=\sqrt{(-10)^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{100+16+9}=\sqrt{125}\ u.$$

IV. 5 DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Dividir un segmento dirigido en una razón dada significa segmentarlo en partes de forma tal que se encuentren las coordenadas de un punto $P(x,y)$ que satisface la comparación entre dos magnitudes. En general, si la razón es de la forma $r=\frac{a}{b}$, implica que el segmento se divide en $a+b$ partes. Por ejemplo, si $r=\frac{7}{4}$, el segmento se divide en 11 partes iguales.

Sean los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, así como el segmento de recta que los une:



Sea un punto $P(x,y)$ que pertenezca al segmento. Si se forman los triángulos mostrados, se observa que son semejantes. Esto es:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=r \qquad \text{y} \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$

donde r es la razón de proporcionalidad de semejanza.

Si se despeja x de la primera ecuación se tiene:

$$x-x_1=r\,(x_2-x)$$
$$x-x_1=r\,x_2-r\,x$$
$$x+xr=x_1+rx_2$$
$$x(1+r)=x_1+r\,x_2,$$ que implica:

$$x = \frac{x_1 + r\,x_2}{1 + r}$$

análogamente se puede encontrar que:

$$y = \frac{y_1 + r\,y_2}{1 + r}$$

expresiones que sirven para obtener las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada.

En el caso particular en que se trate del punto medio, r vale $r = \frac{1}{1} = 1$, y las ecuaciones se convierten en:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplos.
Obtener las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divida al segmento de recta que se forma al unir los siguientes pares de puntos en la razón dada:

1) $P_1(4,-3),\ P_2(9,5),\ r = \frac{3}{2}$

Solución.

$$x = \frac{4 + \frac{3}{2}(9)}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{4 + \frac{27}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{35}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{35}{5} = 7\,; \qquad y = \frac{-3 + \frac{3}{2}(5)}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-3 + \frac{15}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{5}$$

Por lo tanto, el punto buscado es: $P\left(7, \frac{9}{5}\right)$

2) $P_1(-2,8),\ P_2(7,-4),\ r = \frac{4}{5}$

Solución.

$$x = \frac{-2 + \frac{4}{5}(7)}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{-2 + \frac{28}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{18}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{18}{9} = 2\,; \qquad y = \frac{8 + \frac{4}{5}(-4)}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{8 - \frac{16}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{24}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

Por lo tanto, el punto buscado es: $P\left(2, \frac{8}{3}\right)$

Ejemplo.
Encontrar el punto medio del segmento de recta unido por los puntos $A(-8,5)$ y $B(3,-6)$

Solución.

Aplicando las fórmulas del punto medio: $x = \frac{-8+3}{2} = \frac{-5}{2}$; $y = \frac{5+(-6)}{2} = \frac{-1}{2}$. El punto es: $P\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Ejemplo.
Hallar las coordenadas de dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, que dividan al segmento que une a los puntos $k(3,-1)$ y $B(9,7)$ en tres partes iguales.

Solución:

El primer punto está al final del primer tercio, es decir a razón uno a dos: $r = \frac{1}{2}$:

$$x = \frac{3+\frac{1}{2}(9)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{3+\frac{9}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{15}{3} = 5\,; \qquad y = \frac{-1+\frac{1}{2}(7)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-1+\frac{7}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$$

el primer punto buscado es: $P_1\left(5, \frac{5}{3}\right)$

El segundo punto está al final del segundo tercio, es decir a razón dos a uno: $r = \frac{2}{1}$:

$$x = \frac{3+\frac{2}{1}(9)}{1+\frac{2}{1}} = \frac{3+\frac{18}{1}}{1+\frac{2}{1}} = \frac{\frac{21}{1}}{\frac{3}{1}} = \frac{21}{3} = 7\,; \qquad y = \frac{-1+\frac{2}{1}(7)}{1+\frac{2}{1}} = \frac{-1+\frac{14}{1}}{1+\frac{2}{1}} = \frac{\frac{13}{1}}{\frac{3}{1}} = \frac{13}{3}$$

el segundo punto buscado es: $P_2\left(7, \frac{13}{3}\right)$

Ejemplo.
Sabiendo que el punto $P(9,2)$ divide al segmento que determina la unión de los puntos $P_1(6,8)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la razón $r = \frac{3}{7}$, hallar las coordenadas de P_2.

Solución.

$x = \frac{x_1 + r\,x_2}{1+r}$, despejando x_2 :

$$x(1+r) = x_1 + rx_2 \quad \Rightarrow \quad rx_2 = x(1+r) - x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{x(1+r) - x_1}{r}$$

procediendo de forma similar se obtiene: $y_2 = \frac{y(1+r) - y_1}{r}$

sustituyendo en ambas expresiones:

$$x_2 = \frac{9\left(1+\frac{3}{7}\right)-6}{\frac{3}{7}} = \frac{9\left(\frac{10}{7}\right)-6}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{90}{7}-6}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{48}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{48}{3} = 16$$

$$y_2 = \frac{2\left(1+\frac{3}{7}\right)-8}{\frac{3}{7}} = \frac{2\left(\frac{10}{7}\right)-8}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{20}{7}-8}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{-36}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{-36}{3} = -12$$

Por lo tanto, el punto buscado es: $P_2\left(16,-12\right)$

Ejemplo.
Hallar las coordenadas de un punto $P\left(x,y\right)$ que divida al segmento unido por los puntos $P_1\left(-4,-10\right)$ y $P_2\left(12,6\right)$ en las siguientes razones:

a) $r=\frac{1}{7}$ b) $r=\frac{8}{9}$ c) $r=1$ d) $r=\frac{11}{10}$ e) $r=\frac{500}{2}$ f) $r=0$

g) $r=-\frac{1}{6}$ h) $r=-\frac{23}{24}$ i) $r=-1$ j) $r=-\frac{16}{15}$ k) $r=-\frac{600}{2}$

y establecer una conclusión del comportamiento de los puntos con respecto a las relaciones.

Solución:

Al ser fijos P_1 y P_2, las fórmulas $x=\frac{x_1+r\,x_2}{1+r}$ y $y=\frac{y_1+r\,y_2}{1+r}$ se aplican fácilmente a todas las relaciones dadas puesto que las coordenadas no cambian.

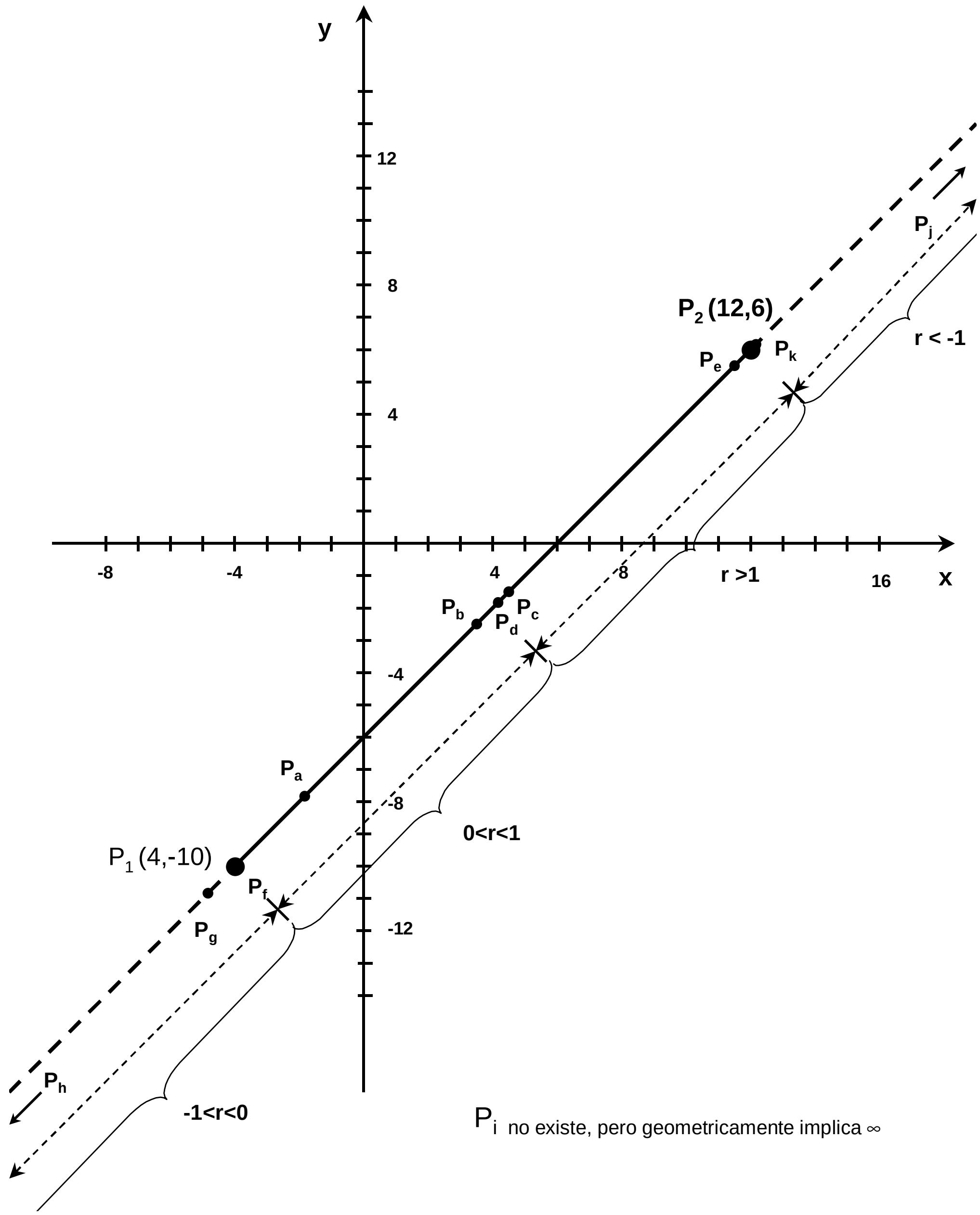
Procediendo repetidamente se obtienen los siguientes puntos de división:

$P_a\ \left(-2,-8\right)$
$P_b\ \left(3.52,-2.47\right)$
$P_c\ \left(4,-2\right)$
$P_d\ \left(4.38,-1.61\right)$
$P_e\ \left(11.93,5.93\right)$
$P_f\ \left(4,-10\right)$
$P_g\ \left(-5.14,-11.14\right)$
$P_h\ \left(-372,-378\right)$
P_i (No existe)
$P_j\ \left(252,246\right)$
$P_k\ \left(12.05,6.05\right)$

A partir de los resultados, se puede concluir que:

- Con $r=0$, el punto $P\left(x,y\right)$ se ubica en P_1
- A medida que r va creciendo $P\left(x,y\right)$ se desplaza hacia P_2
- En su punto medio r vale 1
- Cuando r es negativa, el punto se ubica en su prolongación hacia abajo alejándose hasta que llega a $r=-1$ donde es infinito y cambia de sentido. Al seguir decreciendo, tiende a P_2.

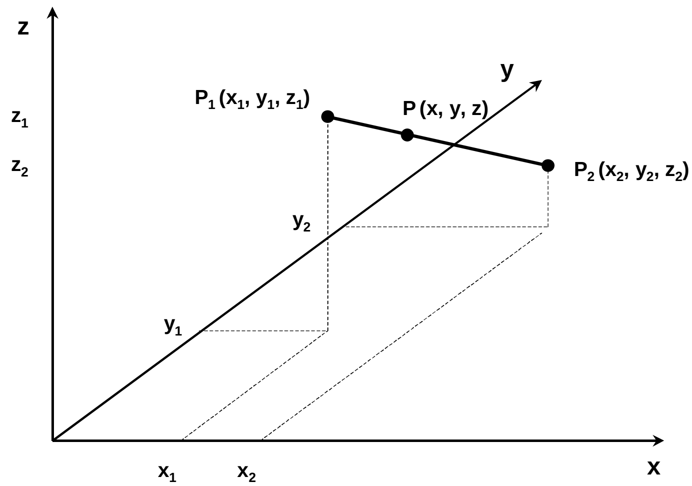
Geométricamente, lo anterior se puede representar como:



En el espacio, las fórmulas división de un segmento en una razón dada se deduce de forma similar que en dos dimensiones ya que el segmento puede ser parte de un plano que une dichos puntos. Esto es, si se tienen los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ como extremos de un segmento y una razón r, el punto que lo divide se puede encontrar por medio de:

$$x = \frac{x_1 + r\,x_2}{1+r}\ ; \qquad y = \frac{y_1 + r\,y_2}{1+r}\ ; \qquad z = \frac{z_1 + z\,x_2}{1+r}$$

Gráficamente, es:



Ejemplo.
Obtener las coordenadas de un punto $P(x,y,z)$ que divida al segmento de recta que se forma al unir los puntos $P_1(-5,-6,11)$ y $P_2(8,-1,-4)$ con la razón $r=\frac{14}{5}$.

Solución.

$$x=\frac{-5+\frac{14}{5}(8)}{1+\frac{14}{5}}=\frac{-5+\frac{112}{5}}{1+\frac{14}{5}}=\frac{\frac{87}{5}}{\frac{19}{5}}=\frac{87}{19}$$

$$y=\frac{-6+\frac{14}{5}(-1)}{1+\frac{14}{5}}=\frac{-6-\frac{14}{5}}{1+\frac{14}{5}}=\frac{\frac{-44}{5}}{\frac{19}{5}}=-\frac{44}{19}$$

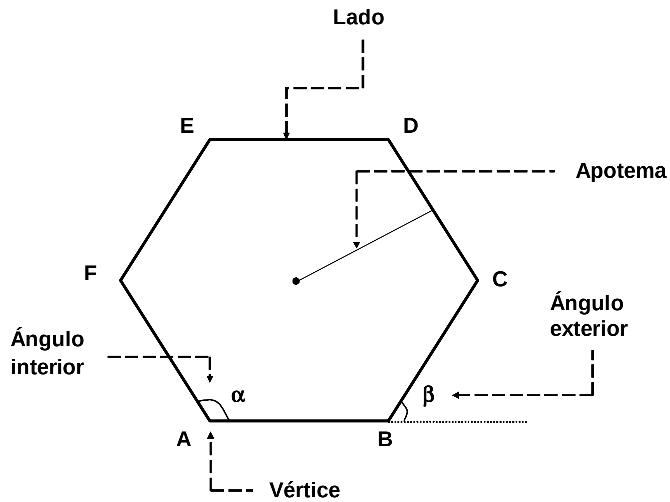
$$z=\frac{11+\frac{14}{5}(-4)}{1+\frac{14}{5}}=\frac{11-\frac{56}{5}}{1+\frac{14}{5}}=\frac{\frac{-1}{5}}{\frac{19}{5}}=-\frac{1}{19}$$

Por lo tanto, el punto buscado es: $P\left(\frac{87}{19},-\frac{44}{19},-\frac{1}{19}\right)$

IV. 6 CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS

La geometría plana se relaciona con el estudio de todas las formas que se presentan en el plano: puntos, segmentos de rectas y ángulos. Dentro de esta larga lista se encuentran los polígonos y la circunferencia.

Un *polígono* es la figura geométrica formada por segmentos de rectas unidos entre sí, de manera que encierran una región del plano. Sus elementos fundamentales los *lados*, los *vértices*, los *ángulos interiores* y los *ángulos exteriores*. Gráficamente es:



- *Lados*: son los segmentos de recta que forman la frontera o polígono.
- *Vértices*: Son los puntos de intersección de dos lados de un polígono. Dichos puntos permiten nombrar al polígono.
- *Ángulos interiores*: son aquellos formados por dos lados del polígono y su región angular queda en la región interior.
- *Ángulos exteriores*: se forman a partir de un lado del polígono y la prolongación del otro adyacente a él.
- *Apotema*: es el segmento que va desde el centro del polígono regular a la mitad de un lado.

Los polígonos tienen el mismo número de lados, apotemas, vértices y ángulos.

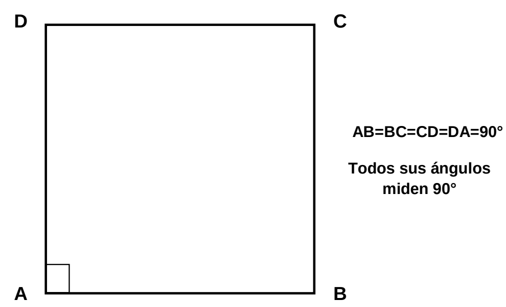
Los polígonos se pueden clasificar de acuerdo a sus lados y a su región interior. Hay polígonos que reciben nombres especiales de acuerdo a su número de lados[1]. Estos nombres de polígonos se agrupan en la siguiente tabla:

LADOS	NOMBRE
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Isodecágono

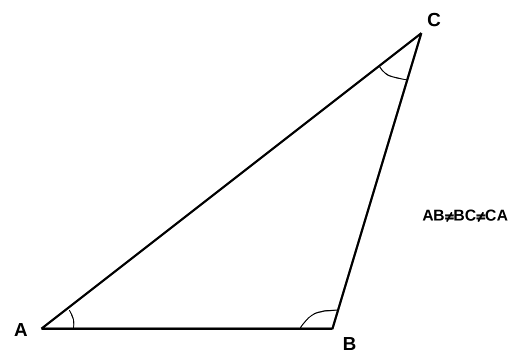
Según la medida de sus lados, los polígonos pueden ser regulares e irregulares.

Son polígonos *regulares* los que tienen todos sus lados y ángulos congruentes, es decir, tienen la misma medida.

[1] Los que no tienen un nombre especial, se designan por el número de lados, por ejemplo, polígono de 27 lados.

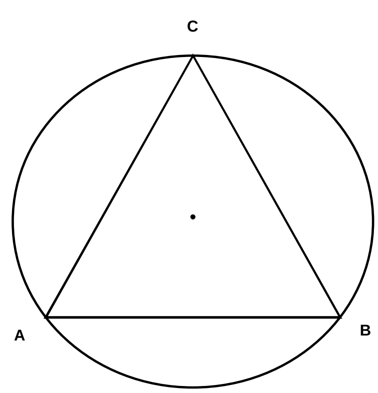


Los polígonos *irregulares* tienen, a lo menos, un lado con distinta medida o sus ángulos son diferentes.

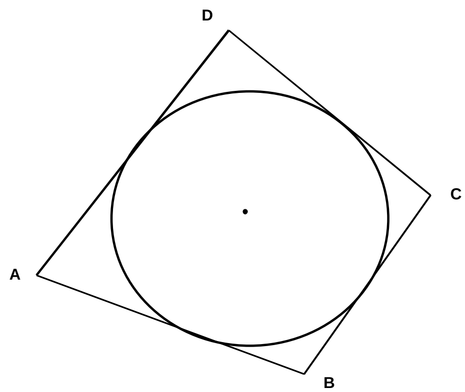


Los polígonos y la circunferencia se relacionan de acuerdo a la posición que ocupan los primeros con respecto a la circunferencia. Es así como se tienen las siguientes situaciones.

- *Polígono inscrito a la circunferencia*. En este caso los vértices del polígono son puntos de la circunferencia y ésta queda circunscrita al polígono. Los lados del polígono son cuerdas de la circunferencia.



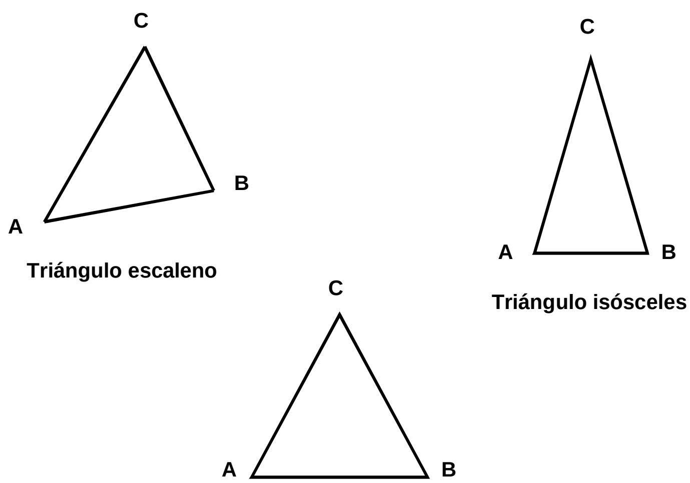
- *Polígono circunscrito a la circunferen*cia. Todos los lados del polígono son tangentes de la circunferencia. La circunferencia queda inscrita al polígono.



CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

Los triángulos son los polígonos que poseen tres lados y cuya suma de sus ángulos es de 180°. La clasificación de los triángulos según sus lados es:

- *Escaleno*: No tiene lados iguales
- *Isósceles*: Tiene dos lados iguales
- *Equilátero*: Tiene los tres lados iguales



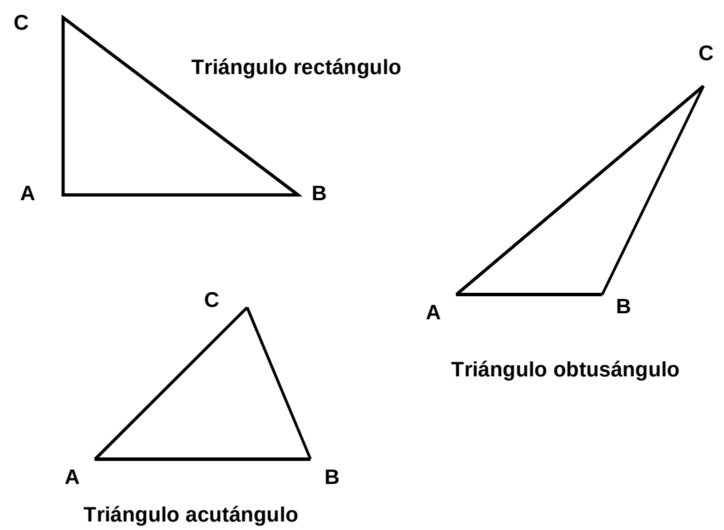
Triángulo escaleno

Triángulo isósceles

Triángulo equilátero

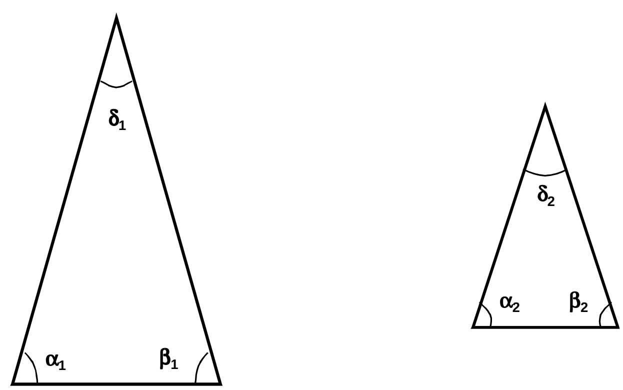
La clasificación de los triángulos según sus ángulos es:

- *Rectángulo*: Tiene un ángulo recto
- *Obtusángulo*: Tiene un ángulo obtuso
- *Acutángulo*: Tiene sus tres ángulos agudos



Semejanza[2]. La semejanza de triángulos puede establecerse a través de dos criterios básicos:

1. Dos triángulos con ángulos respectivos iguales.
2. Dos triángulos con lados homólogos proporcionales.



$\alpha_1 = \alpha_2$

$\beta_1 = \beta_2$

$\delta_1 = \delta_2$

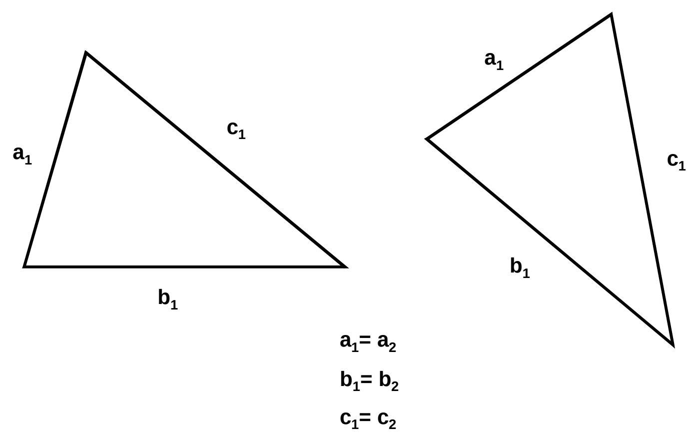
Congruencia[3]. La congruencia de triángulos está determinada en cualquiera de los siguientes casos:

1. Tienen los tres lados iguales
2. Tienen dos ángulos y un lado igual
3. Tienen dos lados iguales e igual el ángulo comprendido.

---

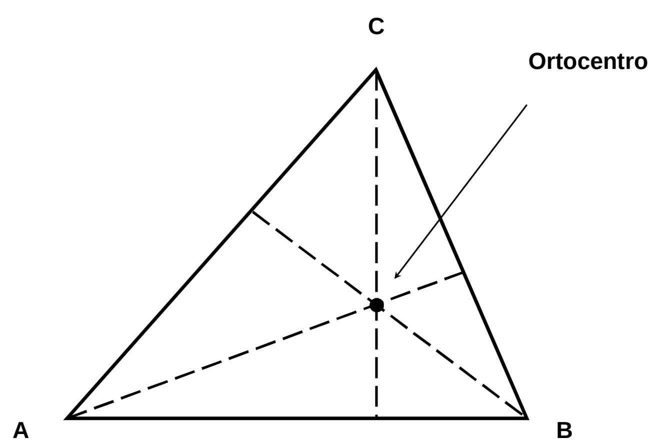
[2] En general, dos figuras son semejantes si tienen la misma forma.

[3] En general, dos figuras son congruentes si coinciden cuando se coloca una sobre otra. Por ejemplo, dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud, dos circunferencias son congruentes si tienen el mismo radio, dos cuadrados son congruentes si tienen el mismo lado.



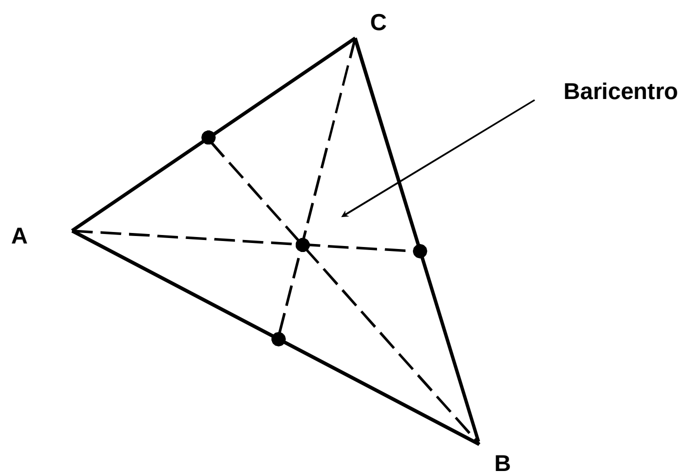
En un triángulo cualquiera, existen *puntos notables* que a continuación se describen:

- Una *altura* es un segmento rectilíneo que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto o su prolongación. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto común denominado *ortocentro*.



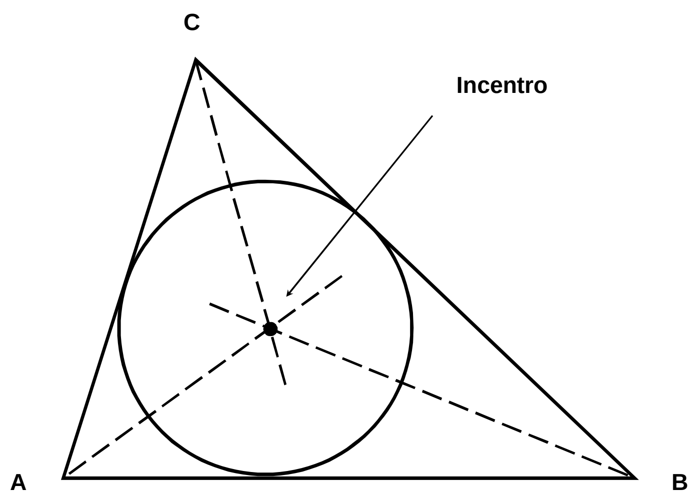
Alturas

- Una *mediana* es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas se cortan en un punto llamado *baricentro*. El baricentro también es conocido como el centro de gravedad y divide a las medianas en dos segmentos, siendo el que corta al vértice de longitud doble que el otro.



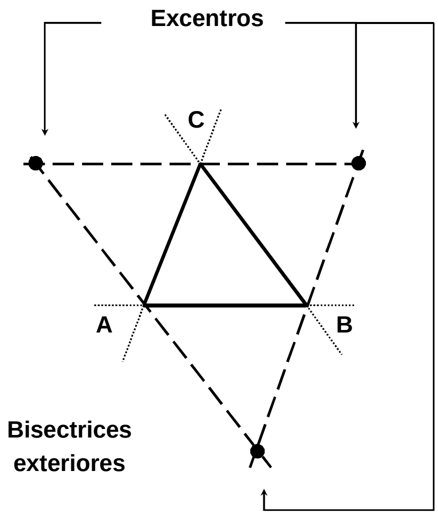
Medianas

- Una *bisectriz interior* es la recta que pasa por un vértice y divide al ángulo interior en dicho vértice en dos partes iguales. Las tres bisectrices internas se cortan en un punto denominado *incentro* que es el centro de la circunferencia inscrita en un triángulo.

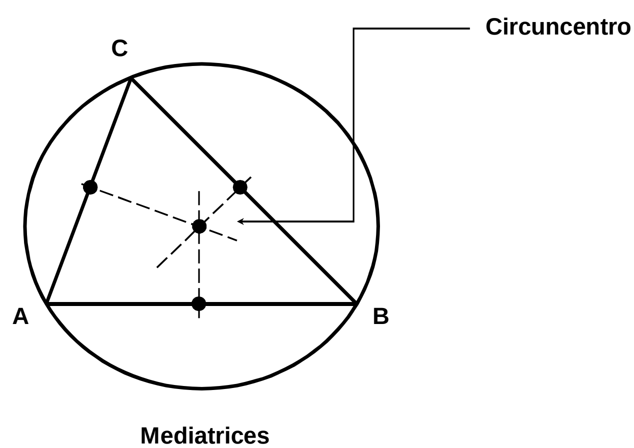


Bisectrices interiores

Una *bisectriz exterior* divide en dos partes iguales al ángulo exterior en dicho vértice. Las tres bisectrices externas se cortan en tres puntos llamados *excentros*. El incentro y los tres excentros son los centros de circunferencias tangentes a los lados de un triángulo o sus prolongaciones.



- Una mediatriz es una recta perpendicular a un lado en su punto medio (los términos bisectriz y mediatriz también se usan para designar a los segmentos rectilíneos correspondientes contenidos dentro del triángulo). Las tres mediatrices se cortan en un punto llamado *circuncentro* que es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

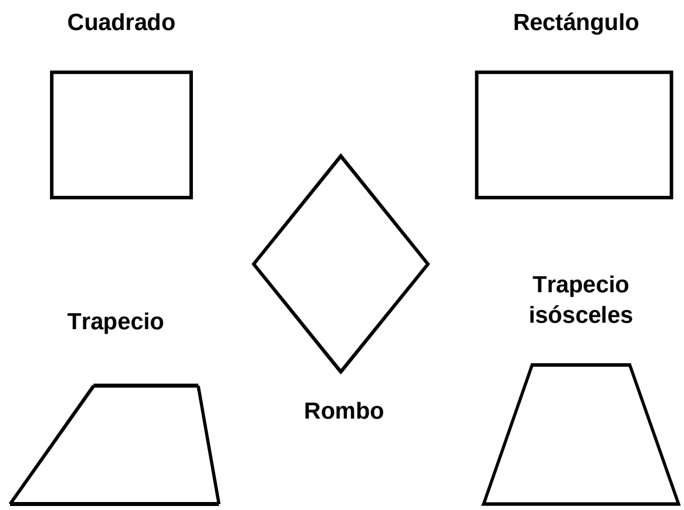


CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros son los polígonos que poseen cuatro lados y cuya suma de sus ángulos es de 360°.

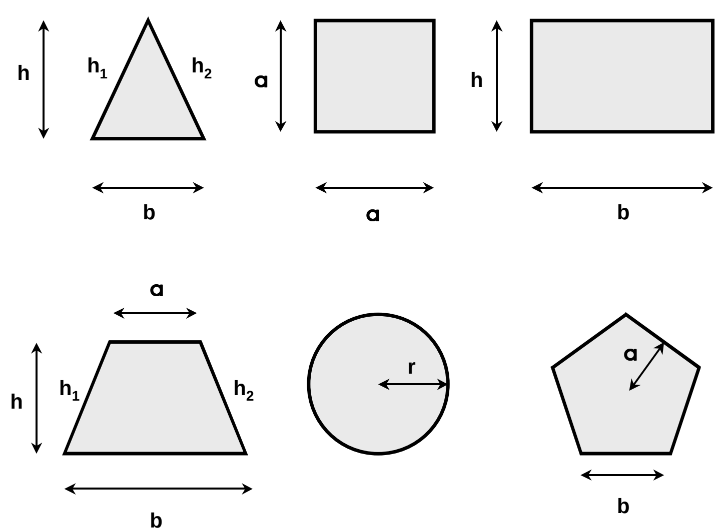
Todos los polígonos regulares pueden estar inscritos o circunscritos a una circunferencia. Los más relevantes son:

- *Cuadrado*. Es un cuadrilátero que tiene lados iguales y ángulos iguales (90°). Los cuadrados tienen dos diagonales iguales y su ángulo formado es también de 90°.
- *Rectángulo*: Es un cuadrilátero que posee dos pares de lados iguales y tienen los ángulos iguales.
- *Rombo*. El rombo es un polígono que tiene los cuatro lados iguales y los ángulos son iguales en pares (dos ángulos son agudos y los otros dos obtusos).
- *Trapecio*. El trapecio es un polígono que tiene 4 lados, de ellos, dos son paralelos. Los cuatro ángulos son distintos de 90º. La suma de los 4 ángulos es 360 grados.
- *Trapecio isósceles*. Es un trapecio que tiene dos pares de lados iguales. Esto es, los ángulos son iguales en pares.



PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

Dadas las siguientes figuras:



El cálculo del área y el perímetro se calculan mediante las fórmulas condensadas en la siguiente tabla:

Figura	Área	Perímetro
Triángulo	$A=\frac{bh}{2}$	$P=b+h_1+h_2$
Cuadrado	$A=a^2$	$P=4\cdot a$
Rectángulo	$A=bh$	$P=2(b+h)$
Trapezoide	$A=\frac{(a+b)h}{2}$	$P=2(a+b)+h_1+h_2$
Circunferencia	$A=\pi r^2$	$P=2\pi r$
Polígono regular de n caras	$A=\frac{Pa}{2}$	$P=nb$

IV.7 APLICACIONES

La utilidad de los sistemas coordenados es especial en la Geografía, la Topografía y en la Aeronáutica, principalmente a través de la utilización de mapas y en radares. Por ejemplo, se puede determinar la posición de algún objeto, utilizando un sistema coordenado teniendo el eje y, hacia el Norte y el eje x, hacia el Este. Esto define las coordenadas de un punto, que puede ser una casa, una ciudad, un avión, una montaña, etc.

Los sistemas coordenados también sirven para conocer el punto en que se encuentran dos móviles que se desplazan en direcciones distintas a una misma velocidad. O bien conocer la distancia de dos objetos si están inmóviles.

Los sistemas coordenados son esenciales para realizar mapas precisos, pero hay algunas sutilezas. Por ejemplo, la superficie esférica aproximada de la Tierra no se puede representar sobre un mapa plano sin que haya distorsión. A unas cuantas decenas de kilómetros, el problema es muy poco notorio, pero a una escala de cientos o miles de kilómetros, la distorsión aparece necesariamente. Se puede hacer una variedad de representaciones aproximadas y cada una implica un tipo algo diferente en la distorsión de forma, área o distancia[4].

Tanto la figura como la escala pueden tener consecuencias importantes en procesos de Ingeniería. Por ejemplo, las conexiones triangulares maximizan la rigidez, las superficies lisas disminuyen la turbulencia y los recipientes esféricos minimizan el área de la superficie para cualquier volumen o masa dada. Cambiar el tamaño de objetos manteniendo la misma forma puede tener efectos profundos debido a la geometría de la escala: el área varía como el cuadrado de las dimensiones lineales, y el volumen lo hace como el cubo.

[4] Un tipo común de mapa exagera las áreas aparentes de las regiones cercanas a los polos (por ejemplo, Groenlandia y Alaska), mientras que otros tipos específicos representan de manera engañosa la distancia más corta entre dos lugares, o aun qué punto es adyacente a qué otro.