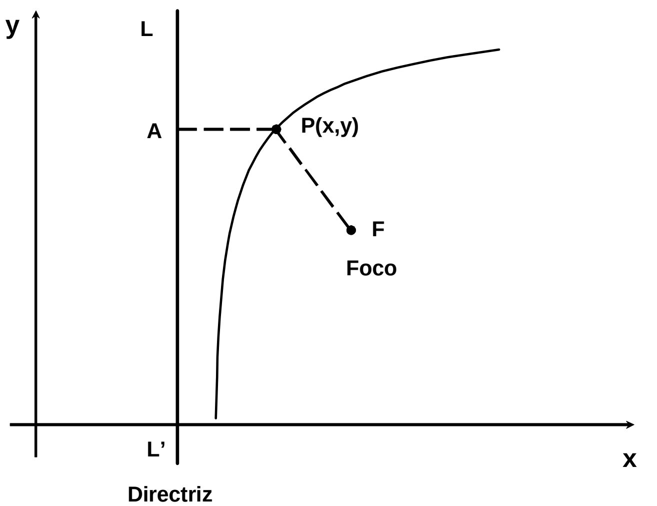
ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

UNIDAD VII

VII.1 DEFINICIÓN DE CÓNICA

Dada una recta fija L y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama *cónica* al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano, de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de L es siempre igual a una constante positiva.

La recta L se llama *directriz*, el punto F, *foco* y la constante positiva, *excentricidad* de la cónica (e):



$$e = \frac{|PF|}{|PA|}$$

Cuando $e = 1$, la definición anterior corresponde a una PARÁBOLA
Cuando $e < 1$, la definición anterior corresponde a una ELIPSE[1]
Cuando $e > 1$, la definición anterior corresponde a una HIPÉRBOLA

VII.2 ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

La ecuación general de segundo grado en dos variables se define como[2]:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

[1] Una circunferencia es un caso particular de la elipse y sus ecuaciones nunca presentan el término Bxy ya que siempre existen dos diámetros paralelos a los ejes coordenados.
[2] A, B, C, D, E, F son coeficientes numéricos; x, y son las variables.

y puede representar una cónica del género parábola, elipse o hipérbola, según el indicador:

$$I = B^2 - 4AC$$

según sea cero, negativo o positivo respectivamente.

Esto puede resumirse en la siguiente tabla:

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$			
	PARÁBOLA	ELIPSE	HIPÉRBOLA
INDICADOR $I = B^2 - 4AC$	$I = 0$	$I < 0$	$I > 0$
EXCENTRICIDAD e	$e = 1$	$e < 1$	$e > 1$

Ejemplos:
Determinar la naturaleza de la cónica que representan las ecuaciones siguientes:

1) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$
Solución.
$A = 4, \quad B = -24, \quad C = 11$
$I = (-24)^2 - 4(4)(11) = 576 - 176 = 400 > 0 \quad \therefore$ es una hipérbola

2) $x^2 + 16y^2 + 8xy - 4x - 16y + 7 = 0$
Solución.
$A = 1, \quad B = 8, \quad C = 16$
$I = 8^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0 \quad \therefore$ es una parábola

3) $-3x^2 - 4xy - 7y^2 + 16x - 18y - 12 = 0$
Solución.
$A = -3, \quad B = -4, \quad C = -7$
$I = (-4)^2 - 4(-3)(-7) = 16 - 84 = -68 < 0 \quad \therefore$ es una elipse

4) $6x - 3y - 15 = 0$
Solución.
$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \quad \therefore$ el indicador no se aplica ya que no se trata de una ecuación de segundo grado en dos variables, sino una de primer grado, por lo tanto, es una recta.

VII.3 TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES COORDENADAS

Los ejes coordenados fueron concebidos como una herramienta que sirve para poder representar puntos y curvas en un plano. Sin embargo, existen lugares geométricos cuya naturaleza requiere de cambios en los ejes y se necesitan representar mediante una traslación, de una rotación o de una combinación de ambas.

En la ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, los términos D y E determinan si está o no trasladada la cónica.

Una *traslación* implica que el lugar geométrico conserva su misma forma pero de forma paralela a los ejes coordenados, es decir, produce un nuevo conjunto de ejes paralelos a los originales. En ese sentido se cumple que:

- Si $D \neq 0$ y $E \neq 0$ significa que está en cualquier punto del plano
- Si $D = 0$ significa que está sobre el eje y
- Si $E = 0$ significa que está sobre el eje x
- Si $D = E = 0$ significa que está en el origen.

En una *rotación*, la forma del lugar geométrico no se altera, sin embargo, su posición respecto a los ejes coordenados no es paralela. Si en la ecuación general de segundo grado, se cumple que $B \neq 0$, se tiene una rotación de los ejes x y y en donde su origen permanece fijo y ambos giran alrededor de éste un cierto ángulo.

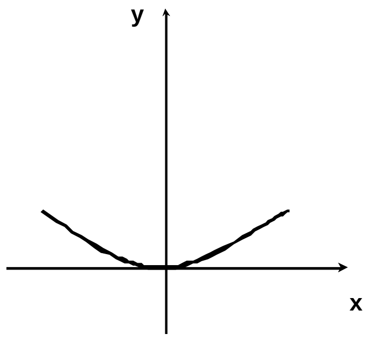
En este sentido, el término Bxy implica que la cónica está rotada con respecto a los ejes coordenados. Considerando lo anterior, si $B = 0$, la cónica es paralela o coincidente a los ejes x y y.

Todos los casos posibles se agrupan en la siguiente tabla[3]:

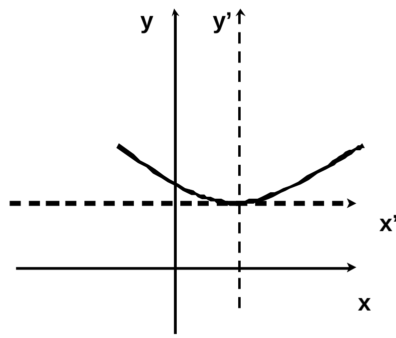
ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$								
	Sin Rotación: $B = 0$				Con Rotación: $B \neq 0$			
	Con Traslación		Sin Traslación		Con Traslación		Sin Traslación	
	$D \neq 0$ $E \neq 0$	$D = 0$ $E \neq 0$	$D \neq 0$ $E = 0$	$D = 0$ $E = 0$	$D \neq 0$ $E \neq 0$	$D = 0$ $E \neq 0$	$E \neq 0$	$D = 0$ $E = 0$
$A = C$	Circunferencia	Circunferencia	Circunferencia	Circunferencia	Circunferencia	Circunferencia	Circunferencia	Circunferencia
$A \neq C$ (mismos signos)	Elipse en cualquier punto	Elipse sobre el eje y	Elipse sobre el eje x	Elipse en el origen	Elipse en cualquier punto	Elipse sobre el eje y	Elipse sobre el eje x	Elipse en el origen
$A \neq C$ (signos contrarios)	Hipérbola en cualquier punto	Hipérbola sobre el eje y	Hipérbola sobre el eje x	Hipérbola en el origen	Hipérbola en cualquier punto	Hipérbola sobre el eje y	Hipérbola sobre el eje x	Hipérbola en el origen
$A = 0$ $C \neq 0$	Parábola con eje en y, en cualquier punto	Parábola con eje en y, sobre el eje y	Parábola con eje en y, sobre el eje x	Parábola con eje en y, en el origen	Parábola con eje en y, en cualquier punto	Parábola con eje en y, sobre el eje y	Parábola con eje en y, sobre el eje x	Parábola con eje en y, en el origen
$A \neq 0$ $C = 0$	Parábola con eje en x, en cualquier punto	Parábola con eje en x, sobre el eje y	Parábola con eje en x, sobre el eje x	Parábola con eje en x, en el origen	Parábola con eje en x, en cualquier punto	Parábola con eje en x, sobre el eje y	Parábola con eje en x, sobre el eje x	Parábola con eje en x, en el origen
$A = C = 0$	Recta	Recta	Recta	Recta	Recta	Recta	Recta	Recta

[3] En las siguientes cuatro unidades se detallará el estudio de cada una de las cónicas y se demostrará el contenido de la tabla.

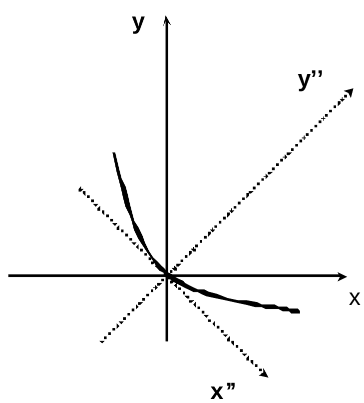
Los conceptos de traslación y rotación se pueden mostrar gráficamente así:



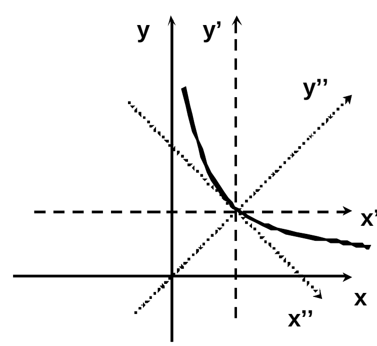
Sin Traslación
Sin Rotación (B=0)



Con Traslación
Sin Rotación (B=0)



Sin Traslación
Con Rotación (B $\neq$ 0)

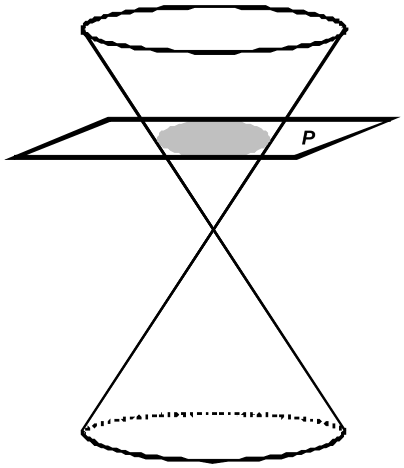


Con Traslación
Con Rotación (B $\neq$ 0)

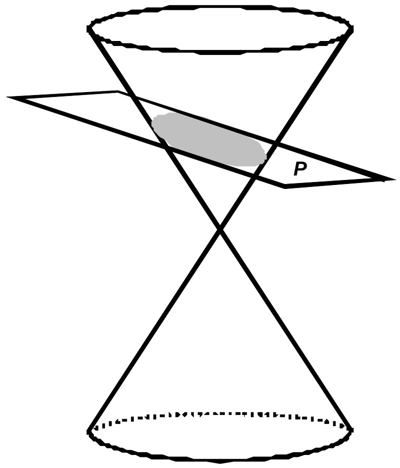
VII.4 SECCIONES PLANAS DE UN CONO CIRCULAR RECTO

El nombre de secciones cónicas con que se designa a la parábola, elipse e hipérbola tiene su origen en el hecho de que estas curvas se obtuvieron por primera vez como secciones planas de un cono circular recto.

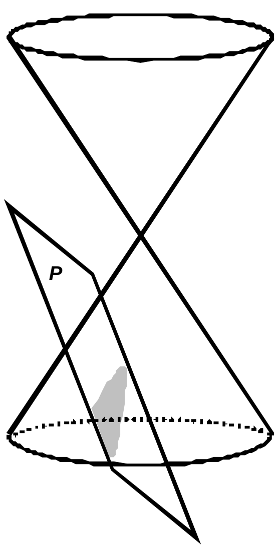
Gráficamente, los cortes de los conos son:



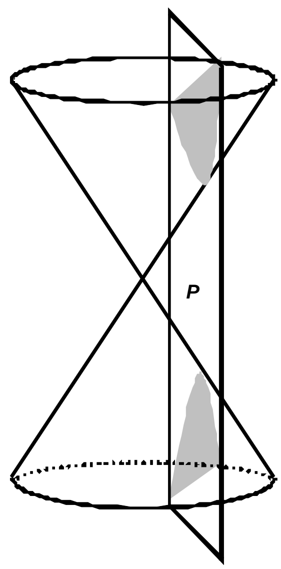
CIRCUNFERENCIA



ELIPSE



PARÁBOLA



HIPÉRBOLA

VII.5 APLICACIONES

Las cónicas tienen diversas aplicaciones en la vida real. A continuación se presentan ejemplos (algunos de ellos se profundizarán cuando se analicen de forma particular en los capítulos subsecuentes):

1. En las antenas receptoras que tienen la forma de paraboloide de revolución. Las señales que se emiten de un satélite llegan a la superficie de la antena y se reflejan hacia el punto donde esta localizado el receptor (de ahí el nombre de *antenas parabólicas*).

2. Algunas piezas mecánicas que presentan formas pentagonales, hexagonales u octagonales están delimitados a través de una circunferencia o tienen en su base circunferencias concéntricas.
3. La órbita que sigue un objeto dentro de un campo gravitacional constante es una parábola. Así, la línea que describe cualquier móvil que es lanzado con una cierta velocidad inicial, que no sea vertical, es una parábola[4].
4. La primera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas dice que éstos siguen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Es muy posible que Newton no hubiese podido descubrir su famosa ley de la gravitación universal de no haber conocido ampliamente la geometría de las elipses.
5. Con base en investigaciones se sabe que las partículas alfa apuntadas hacia el núcleo de un átomo son repelidas y siguen una trayectoria hiperbólica.
6. Al saber que una cónica es el resultado de cortar una superficie de un cono con un plano, los arquitectos y los ingenieros han desarrollado muchas construcciones que presentan diseños muy novedosos utilizando parábolas e hipérbolas. En las iglesias modernas esto es muy notorio.

[4] Esto no es realmente exacto, ya que la gravedad no es constante: depende de la distancia del punto al centro de la Tierra. En realidad la curva que describe el móvil (si se ignora el rozamiento del aire) es una elipse que tiene uno de sus focos en el centro de la Tierra.