



CIRCUNFERENCIA

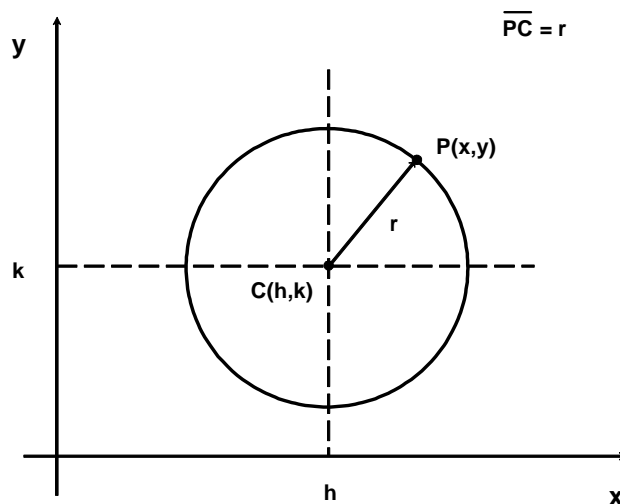
UNIDAD VIII

VIII.1 DEFINICIÓN DE CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de un punto fijo en el plano llamado *centro*. La distancia que existe de cualquiera de sus puntos al centro recibe el nombre de *radio*.

Cabe señalar que una circunferencia y un círculo no son sinónimos, ya que un círculo es la porción del plano comprendida y limitada por una circunferencia, es decir, toda su región interior.

Si el centro de la circunferencia se ubica en el punto de coordenadas (h, k) , su gráfica tendrá una forma como la siguiente:



Para obtener la ecuación que describe a este lugar geométrico, se aplica la fórmula de distancia entre los puntos $P(x, y)$ y $C(h, k)$:

$$d = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Pero por definición, esta distancia es igual al radio r , por lo tanto:

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

elevando al cuadrado:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

que es la ecuación *ordinaria* o *canónica de la circunferencia* con centro en (h, k) y radio r .

Para el caso especial en que el centro se localiza en el origen, esta ecuación toma la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplos.

1) Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en $C(3, -7)$ y que tenga radio seis.

Solución.

$h = 3$, $k = -7$, $r = 6$, aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-(-7))^2 &= 6^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+7)^2 = 36 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 14y + 49 = 36 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 14y + 22 &= 0 \end{aligned}$$

2) Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y de radio cuatro.

Solución.

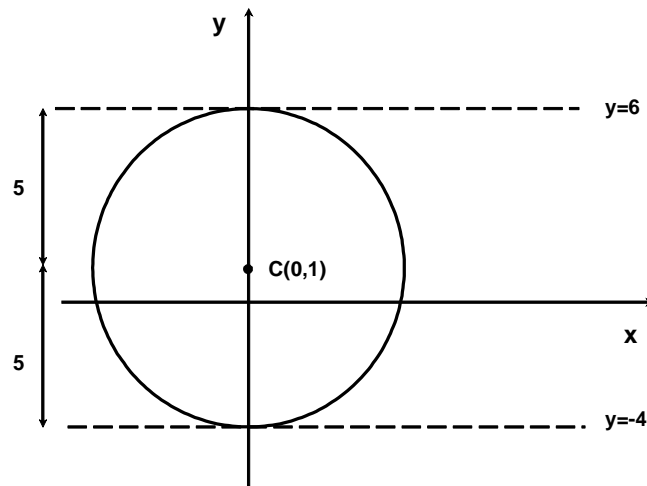
Como se trata del caso especial se aplica la fórmula: $x^2 + y^2 = r^2$, esto es:

$$x^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 16 = 0$$

3) Hallar la ecuación de la circunferencia que sea tangente a las rectas $y = 6$, $y = -4$ y que esté sobre el eje y .

Solución.

Graficando:



Se observa que el punto medio de las dos rectas es $y = \frac{6 + (-4)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, por lo tanto, al estar sobre el eje y , tiene abscisa $x = 0$, y el centro será $C(0,1)$. El radio es $r = 6 - 1 = 1 - (-4) = 5$, por lo que aplicando la fórmula se tiene:

$$\begin{aligned} (x-0)^2 + (y-1)^2 &= 5^2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 25 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 24 &= 0 \end{aligned}$$

VIII.2 ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Sea la ecuación ordinaria: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

desarrollando se tiene: $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$

acomodando: $x^2 - 2hx + y^2 - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

ahora, si se hacen los siguientes cambios de variable: $D = -2h$, $E = -2k$, $F = h^2 + k^2 - r^2$
y si se sustituyen, la ecuación resultante es:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

expresión conocida como ecuación *general de la circunferencia*.

Ejemplo.

Obtener la ecuación general de la circunferencia con centro en $C(-3,6)$ y que pase por el punto $P(9,1)$.

Solución.

Al no tener el radio como dato debe encontrarse mediante la distancia que separa a los puntos. Esa distancia viene dada por: $r = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, considerando a P como punto uno y al

centro como punto dos: $r = \sqrt{(6 - (-3))^2 + (-9 - 6)^2} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned} (x - (-3))^2 + (y - 6)^2 &= 13^2 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 169 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 169 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 12y - 124 &= 0 \end{aligned}$$

VIII.3 OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN ORDINARIA A PARTIR DE LA ECUACIÓN GENERAL

Sea la ecuación general: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

acomodando convenientemente: $x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0$

completando los trinomios cuadrados perfectos: $x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} + F - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} = 0$

factorizando: $(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 + F - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} = 0$

o bien: $(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$

efectuando los siguientes cambios de variable: $h = -\frac{D}{2}$, $k = -\frac{E}{2}$, $r^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$

la ecuación toma la forma: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

comparando ambas ecuaciones, el centro se ubica en: $C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

$$\text{y su radio es: } r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F} = \sqrt{\frac{1}{4}(D^2 + E^2 - 4F)} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Por lo tanto:

Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la circunferencia es real

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la circunferencia es un punto

Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la circunferencia es imaginaria (no existe).

Ejemplos.

Hallar las coordenadas del centro, encontrar la magnitud del radio y determinar si se trata de una circunferencia real, imaginaria o un punto en las siguientes ecuaciones:

$$1) x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$$

Solución.

$$D = -8, \quad E = 10, \quad F = -12$$

$$C\left(-\frac{(-8)}{2}, -\frac{10}{2}\right) \Rightarrow C(4, -5)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2 + 10^2 - 4(-12)} = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 100 + 48} = \frac{1}{2}\sqrt{212} = \frac{1}{2}\sqrt{4(53)} = \sqrt{53}$$

como $53 > 0$, entonces la circunferencia es real.

$$2) x^2 + y^2 - 2x + 6y + 61 = 0$$

Solución.

$$D = -2, \quad E = 6, \quad F = 61$$

$$C\left(-\frac{(-2)}{2}, -\frac{6}{2}\right) \Rightarrow C(1, -3)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 6^2 - 4(61)} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 - 244} = \frac{1}{2}\sqrt{-204}$$

como $-204 < 0$, entonces la circunferencia es imaginaria

$$3) 36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0$$

Solución.

$$\text{Dividiendo todo entre } 36 \text{ queda: } x^2 + y^2 + \frac{48}{36}x - 3y + \frac{97}{36} = 0$$

$$D = \frac{48}{36}, \quad E = -3, \quad F = \frac{97}{36}$$

$$C\left(-\frac{\frac{48}{36}}{2}, -\frac{(-3)}{2}\right) \Rightarrow C\left(-\frac{48}{72}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow C\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{48}{36}\right)^2 + (-3)^2} - 4\left(\frac{97}{36}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (-3)^2} - \frac{388}{36} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16}{9} + 9} - \frac{388}{36}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{64}{36} + \frac{324}{36} - \frac{388}{36}} = \sqrt{\frac{388}{36} - \frac{388}{36}} = \sqrt{0} = 0$$

como el resultado es cero entonces la circunferencia es el punto de coordenadas: $C\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

VIII.4 PROBLEMAS RELATIVOS A LA CIRCUNFERENCIA

Ejemplos misceláneos.

1) Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en $C(-3,5)$ y que sea tangente a la recta $8x - 6y + 14 = 0$

Solución.

Como no se tiene el radio debe encontrarse por medio de la fórmula de distancia de un punto a una recta:

$$r = d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8(-3) - 6(5) + 14|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{|-24 - 30 + 14|}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{|-40|}{\sqrt{100}} = \frac{40}{10} = 4$$

$$\therefore (x+3)^2 + (y-5)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$$

2) Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene como extremos de uno de sus n diámetros a los puntos $A(5,6)$ y $B(-1,2)$

Solución.

Como no se tiene ningún dato directo, para obtener el centro se debe obtener el punto medio entre A y B . Por su parte, para obtener el radio se debe encontrar la distancia del centro a cualquiera de los dos puntos:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \therefore C(2,4)$$

$$\text{su radio es: } r = \sqrt{(5-2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\text{y la ecuación queda: } (x-2)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{13})^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-4)^2 = 13 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 7 = 0$$

3) Encontrar la ecuación de la circunferencia que tenga radio cinco y que tenga el mismo centro que la circunferencia $2x^2 + 2y^2 + 24x - 36y + 34 = 0$

Solución.

$$\text{Dividiendo entre dos la ecuación queda: } x^2 + y^2 + 12x - 18y + 17 = 0$$

$$D = 12, \quad E = -18, \quad F = 17$$

obteniendo su centro:

$$\therefore C\left(-\frac{12}{2}, -\frac{(-18)}{2}\right) \Rightarrow C(-6,9)$$

$$\therefore (x+6)^2 + (y-9)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 - 18y + 81 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 + 12x - 18y + 92 = 0$$

4) ¿Cuáles de los siguientes puntos: $A(12,-3)$, $B(9,1)$, $D(11,-1)$, $K(-1,5)$ y $W(3,3)$ pertenecen a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 14y - 42 = 0$?

Solución.

$$D = -6, \quad E = 14, \quad F = -42, \quad \text{así que el centro se encuentra en: } C\left(-\frac{(-6)}{2}, -\frac{14}{2}\right) \Rightarrow C(3,-7)$$

$$\text{y su radio es: } r = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 14^2 - 4(-42)} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 196 + 168} = \frac{1}{2}\sqrt{400} = \frac{1}{2}(20) = 10$$

∴ su ecuación es: $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 10^2$ o bien: $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 100$. Sustituyendo:

el punto A : $(12-3)^2 + (-3+7)^2 = 9^2 + 4^2 = 81 + 16 = 97 \neq 100$ ∴ $A \notin$ a la circunferencia

el punto B : $(9-3)^2 + (1+7)^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 100$ ∴ $B \in$ a la circunferencia

el punto D : $(11-3)^2 + (-1+7)^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 = 100$ ∴ $D \in$ a la circunferencia

el punto K : $(-1-3)^2 + (5+7)^2 = (-4)^2 + 12^2 = 16 + 144 = 160 \neq 100$ ∴ $K \notin$ a la circunferencia

el punto W : $(3-3)^2 + (3+7)^2 = 0^2 + 10^2 = 0 + 100 = 100 = 100$ ∴ $W \in$ a la circunferencia

5) Obtener la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos: $L(-3,6)$, $M(-6,7)$ y $N(-2,5)$

Solución.

Como los tres puntos pertenecen a la circunferencia, satisfacen la ecuación general, por tanto:

$$\text{sustituyendo el punto } L: (-3)^2 + 6^2 + D(-3) + E(6) + F = 0 \Rightarrow -3D + 6E + F = -9 - 36$$

$$\text{sustituyendo el punto } M: (-6)^2 + 7^2 + D(-6) + E(7) + F = 0 \Rightarrow -6D + 7E + F = -36 - 49$$

$$\text{sustituyendo el punto } N: (-2)^2 + 5^2 + D(-2) + E(5) + F = 0 \Rightarrow -2D + 5E + F = -4 - 25$$

$$\text{acomodando queda: } \left. \begin{array}{l} -3D + 6E + F = -45 \\ -6D + 7E + F = -85 \\ -2D + 5E + F = -29 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de determinantes:

$$D = \frac{\begin{vmatrix} -45 & 6 & 1 \\ -85 & 7 & 1 \\ -29 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 6 & 1 \\ -6 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-315 - 425 - 174 + 203 + 510 + 225}{-21 - 30 - 12 + 14 + 36 + 15} = \frac{24}{2} = 12$$

$$E = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -45 & 1 \\ -6 & -85 & 1 \\ -2 & -29 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 6 & 1 \\ -6 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{255 + 174 + 90 - 170 - 270 - 87}{-21 - 30 - 12 + 14 + 36 + 15} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$F = \begin{vmatrix} -3 & 6 & -45 \\ -6 & 7 & -85 \\ -2 & 5 & -29 \end{vmatrix} = \frac{609 + 1350 + 1020 - 630 - 1044 - 1275}{-21 - 30 - 12 + 14 + 36 + 15} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\text{comprobación: } \left. \begin{aligned} -3(12) + 6(-4) + 15 &= -36 - 24 + 15 = -45 \\ -6(12) + 7(-4) + 15 &= -72 - 28 + 15 = -85 \\ -2(12) + 5(-4) + 15 &= -24 - 20 + 15 = -29 \end{aligned} \right\}$$

por lo tanto, sustituyendo en la ecuación general los valores de D , E y F se obtiene la ecuación buscada: $x^2 + y^2 + 12x - 4y + 15 = 0$

obteniendo su centro:

$$\therefore C\left(-\frac{12}{2}, -\frac{(-4)}{2}\right) \Rightarrow C(-6, 2)$$

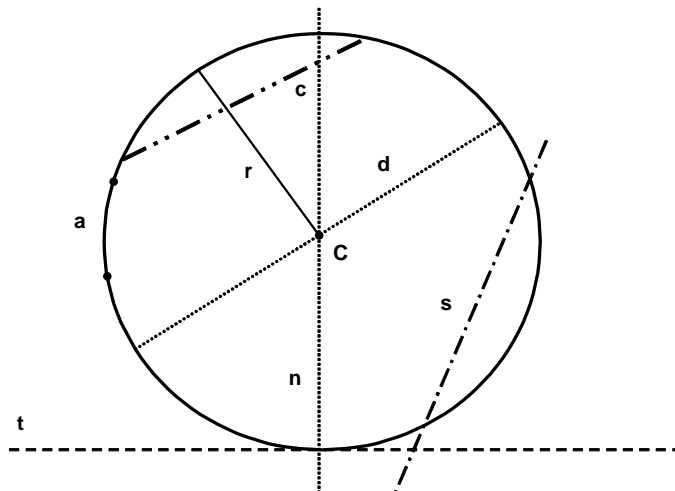
su radio es:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(12)^2 + (-4)^2 - 4(15)} = \frac{1}{2}\sqrt{144 + 16 + 60} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = \frac{1}{2}(10) = 5$$

Nótese como los puntos son los vértices de un triángulo, cuyo circuncentro es el centro de la circunferencia.

VIII.5 ELEMENTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

Los ocho elementos básicos de una circunferencia son los siguientes:



Centro (C). Es el punto fijo en el plano sobre el que gira un punto que genera la circunferencia.
 Radio (r). Es el segmento de recta que existe del centro a cualquier punto de la circunferencia.
 Diámetro (d). Es el segmento de recta entre dos puntos de la circunferencia que pasa por el centro.
 Tangente (t). Es la recta que sólo toca a un punto de la circunferencia.
 Cuerda (c). Es un segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.
 Arco (a). Es una parte o subconjunto de la circunferencia, limitada por dos puntos de ella.
 Secante (s). Es la recta que cruza a una circunferencia en dos puntos.
 Normal (n). Es la recta que es perpendicular a la tangente de una circunferencia.

Por su parte, los ángulos relacionados a una circunferencia son seis:

Central.- Es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia.

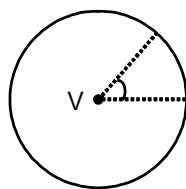
Inscrito.- Es el ángulo que tiene el vértice en la circunferencia y sus lados la cortan.

Semiinscrita.- Es el ángulo formado cuando su vértice está en la circunferencia, siendo un lado secante y el otro tangente a ella.

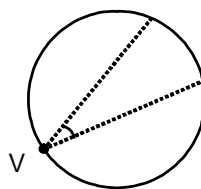
Interior.- Es el ángulo que tiene el vértice en el contorno delimitado por la circunferencia pero no en su centro.

Exterior.- Es el ángulo formado cuando su vértice no está en la circunferencia ni en el contorno delimitado por ella.

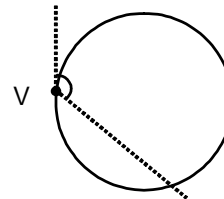
Circunscrito.- Es el ángulo formado cuando su vértice está en la circunferencia, siendo los dos lados tangente a ella.



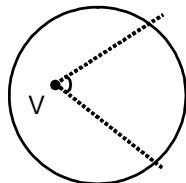
ángulo
central



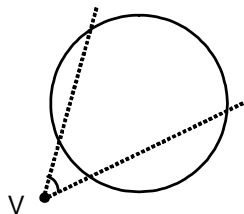
ángulo
inscrito



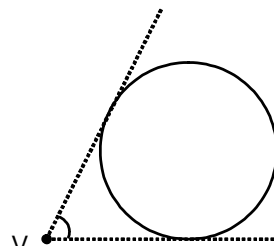
ángulo
semiinscrita



ángulo
interior



ángulo
exterior

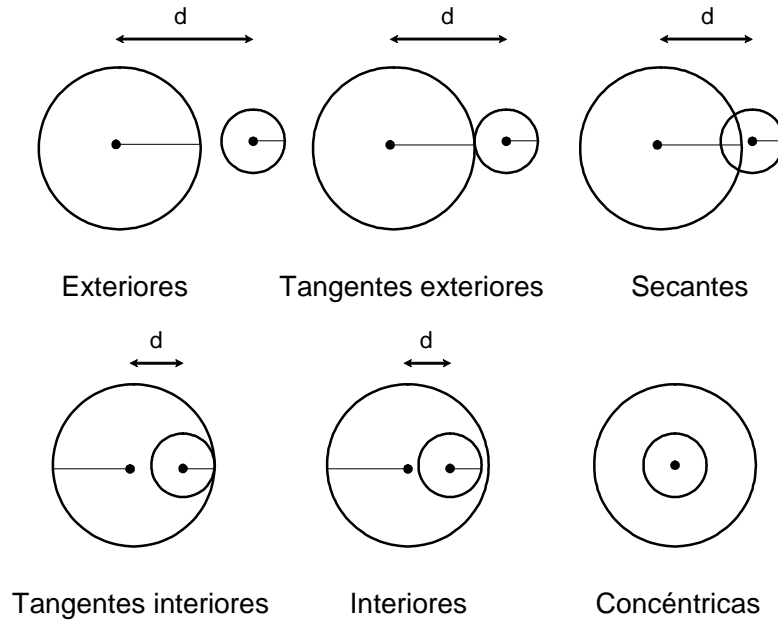


ángulo
circunscrito

VIII.6 POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Dependiendo de la distancia a que se encuentren y de sus radios, dos circunferencias, cuyos centros se encuentran a una distancia d pueden ser:

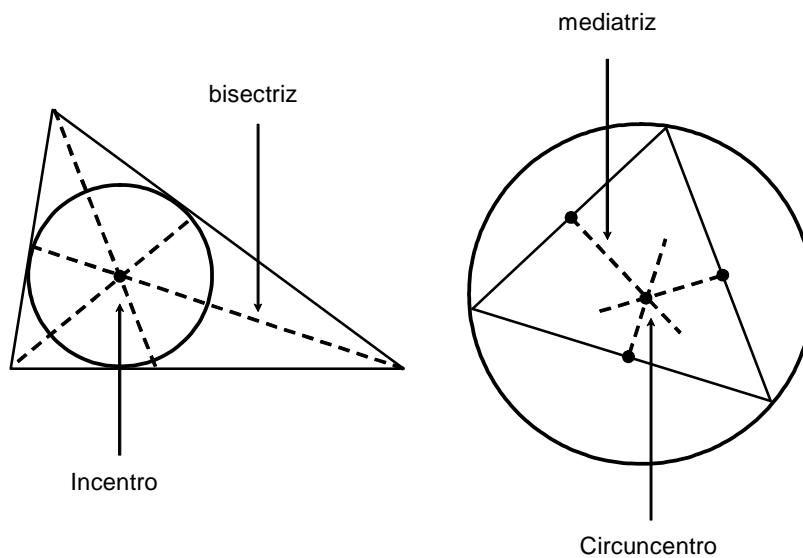
- *Exteriores*, si d es mayor que la suma de sus radios
- *Tangentes exteriores*, si d es igual a la suma de sus radios
- *Secantes*, si d es menor que la suma de los radios pero mayor que su diferencia
- *Tangentes interiores*, si d es igual a la diferencia de los radios
- *Interiores* si d es menor que la diferencia de los radios y mayor que cero
- *Concéntricas*, si d es cero.



Dos de los cuatro puntos notables de un triángulo definidos en el capítulo IV son el incentro y el circuncentro:

- El incentro es el punto de intersección de las bisectrices (una bisectriz es un recta que divide a un ángulo en dos partes iguales).
- El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices (una mediatriz es la recta perpendicular de un segmento en su punto medio).

Estos puntos tienen relación directa con la circunferencia. El incentro es el centro de la circunferencia que es tangente interior a los lados del triángulo. Por su parte el circuncentro es centro de la circunferencia que contiene los tres vértices del triángulo.



VIII.7 APLICACIONES

La circunferencia se aplica en todo aquello relacionado con movimiento rotativo, por ejemplo:

1. El movimiento circular. Es aquél cuya trayectoria de un punto siempre posee la misma distancia a su centro. Tal es el caso de un reproductor de discos compactos o de DVD, el plato de un horno de microondas, los generadores, etc. El movimiento circular puede ser: uniforme, si la velocidad angular es constante, o bien acelerado si la aceleración angular es diferente de cero. En el primer caso se puede incluir aquellos mecanismos de proceso continuo (como la fabricación de papel) y en el segundo caso se puede incluir el comportamiento de los neumáticos de un automóvil o el motor de una lavadora).
2. La circunferencia también se utiliza en construcciones, tales como en puertas, cúpulas, y columnas. La trayectoria de algunos satélites describen órbitas circulares, así como el comportamiento de la luz de un faro.
3. Algunas piezas mecánicas presentan formas circulares, tales como rondanas, cabezas de tornillos, el filo de un orificio creado por la broca de un taladro, las aspas de un ventilador, y en general, todo aquello que gira por medio de motores.
4. Algunos fenómenos naturales, tales como el arco iris o la sombra de la luna en la Tierra en un eclipse total de Sol, están también determinados por circunferencias