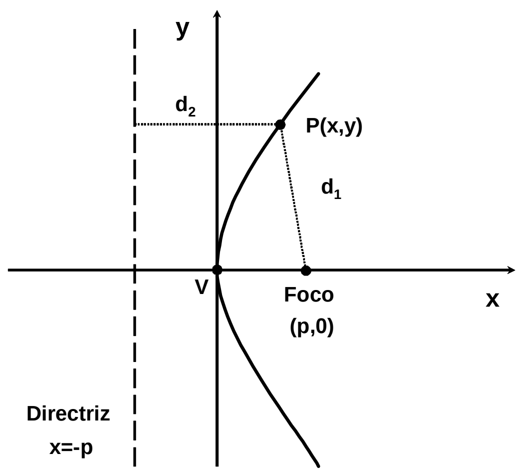
PARÁBOLA

UNIDAD IX

IX.1 DEFINICIÓN DE PARÁBOLA

La parábola se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo en el plano llamado *foco* y de una recta también fija en el plano llamada *directriz*. El punto medio entre el foco y la directriz se llama *vértice*. La distancia del vértice al foco o de del vértice a la directriz se le denota mediante la letra p. La siguiente figura muestra a una parábola que es paralela al eje x y que se abre a la derecha:



La distancia que existe de cualquier punto $P(x,y)$ que pertenezca a la parábola al foco es:

$$d_1 = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

Por su parte, la distancia que existe de cualquier punto $P(x,y)$ que pertenezca a la parábola a la directriz es:

$$d_2 = x + p$$

Ahora, por definición: $d_1 = d_2$

sustituyendo queda:

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = x + p$$

ahora, elevando al cuadrado se tiene:

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

desarrollando:

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

eliminando términos queda:

$$-2xp + y^2 = 2xp$$

o bien:

$$y^2 = 2xp + 2xp$$

que es igual a:

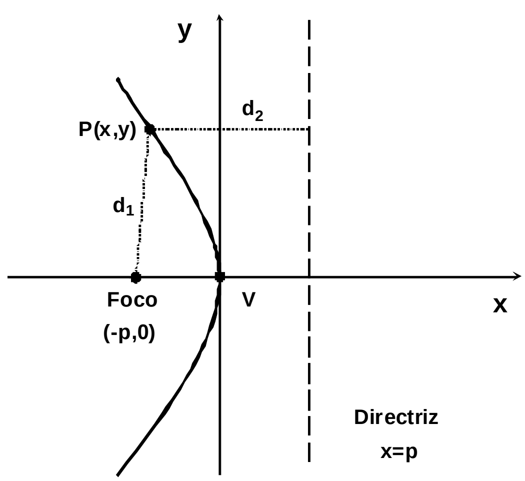
$$y^2 = 4px$$

ecuación conocida como *ecuación ordinaria o canónica de la parábola* con vértice en el origen.

A la recta que pasa por el vértice y el foco se le conoce como *eje de la parábola* (EP).

Cabe señalar que en una parábola la excentricidad siempre es uno porque la distancia que hay del vértice al foco es igual a la que hay del vértice a la directriz.

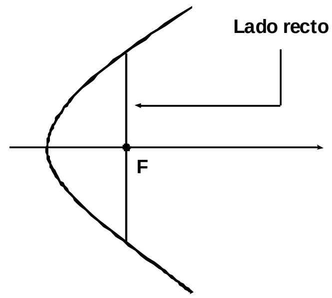
Similarmente, si el eje de la parábola también es el eje x, pero se abre para la izquierda entonces el foco se ubica en $F(0,-p)$ y la directriz tiene ecuación $x = p$, gráficamente esto es:



Haciendo un análisis similar al anterior se obtiene que su ecuación canónica es:

$$y^2 = -4px$$

Se conoce como lado recto (LR) de cualquier parábola a la longitud de una recta perpendicular al EP y que pasa por su foco y que incluye a la parábola en ambos extremos.

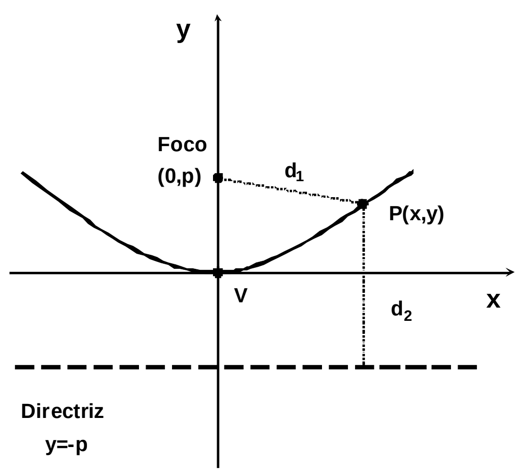


Sustituyendo p en la ecuación se tiene: $y^2 = 4p(p) = 4p^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4p^2} = \pm 2p$, por lo tanto cada ordenada tiene un longitud de $2p$, eso significa que el lado recto se calcula como:

$$LR = |4p|$$

Por otra parte, si el eje de la parábola es el eje y, se tienen dos casos:

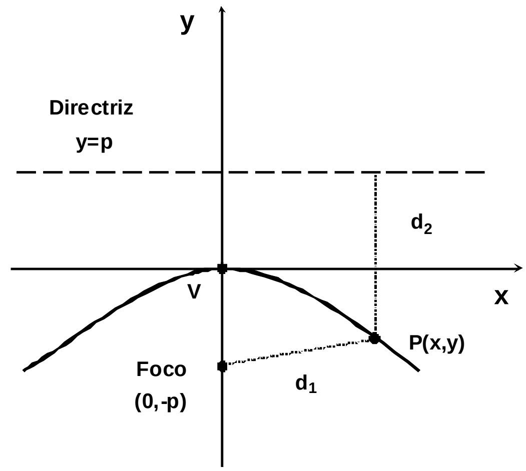
Si se abre hacia arriba se tiene que el foco se ubica en $F(0, p)$ y su directriz es: $y = -p$, tal y como se muestra en la figura:



Su ecuación ordinaria es:

$$x^2 = 4py$$

Si se abre hacia abajo con foco en $F(0, -p)$ y directriz en $y = p$, se tiene:



Su ecuación ordinaria es:

$$x^2 = -4py$$

Ejemplos.
Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de las siguientes parábolas:

1) $y^2 = 8x$
Solución.
$4p = 8 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{8}{4} = 2$. $EP: eje\ x$. Signo (+), por lo que se abre hacia la derecha.
El foco se ubica en $F(2,0)$. La ecuación de la directriz es: $x = -2$. El lado recto es: $LR = |4(2)| = 8\ u$.

2) $y^2 = -12x$
Solución.
$4p = -12 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{-12}{4} = -3$. $EP: eje\ x$. Signo (-), por lo que se abre hacia la izquierda. El foco se ubica en $F(-3,0)$. La ecuación de la directriz es: $x = 3$. El lado recto es: $LR = |4(-3)| = 12\ u$.

3) $x^2 = 16y$
Solución.
$4p = 16 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{16}{4} = 4$. $EP: eje\ y$. Signo (+), por lo que se abre hacia arriba. El foco se ubica en $F(0,4)$. La ecuación de la directriz es: $y = -4$. El lado recto es: $LR = |4(4)| = 16\ u$.

4) $x^2 = -7y$
Solución.

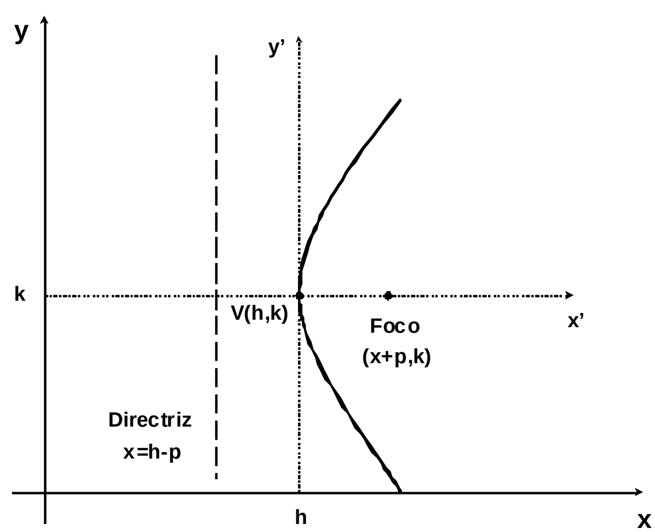
$4p=-7 \quad \Rightarrow \quad p=-\frac{7}{4}$. $EP: eje\; y$. Signo (-), por lo que se abre hacia abajo. El foco se ubica en $F\left(0,-\frac{7}{4}\right)$. La ecuación de la directriz es: $y=\frac{7}{4}$. El lado recto es: $LR=\left|4\left(\frac{7}{4}\right)\right|=7\,u.$

5) Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco se ubica en $F(3,0)$ y vértice en el origen.
Solución.
$EP: eje\; x$. $p=3 \;\therefore\; y^2=4(3)x \quad \Rightarrow \quad y^2=12x$. La ecuación de la directriz es: $x=-3$. Como el signo es (+) se abre hacia la derecha. El lado recto es: $LR=|4(3)|=12\,u.$

6) Hallar la ecuación de la parábola cuya ecuación de su directriz es $y=9$ y vértice en el origen.
Solución.
$EP: eje\; y$. $p=9 \;\therefore\; x^2=-4(9)y \quad \Rightarrow \quad x^2=-36y$. El foco se ubica en $F(0,9)$. Como el signo es (-) se abre hacia abajo. El lado recto es: $LR=|4(-9)|=36\,u.$

IX.2 TRASLACIÓN DE EJES COORDENADOS

Si el vértice de la parábola con EP en x se ubica en $V(h,k)$ y si se abre a la derecha, entonces se ha desplazado h unidades con respecto al eje x y k unidades con respecto al eje y. Esto se muestra en la siguiente figura:



La parábola sobre los ejes x' y y' tendría como ecuación: $y'^2=4px'$

pero de la figura se aprecia que:

$$x=x'+h \qquad y \qquad y=y'+k$$

o sea:

$x' = x - h \qquad y \qquad y' = y - k$

por lo tanto si se sustituye en la ecuación con los ejes trasladados se tiene:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

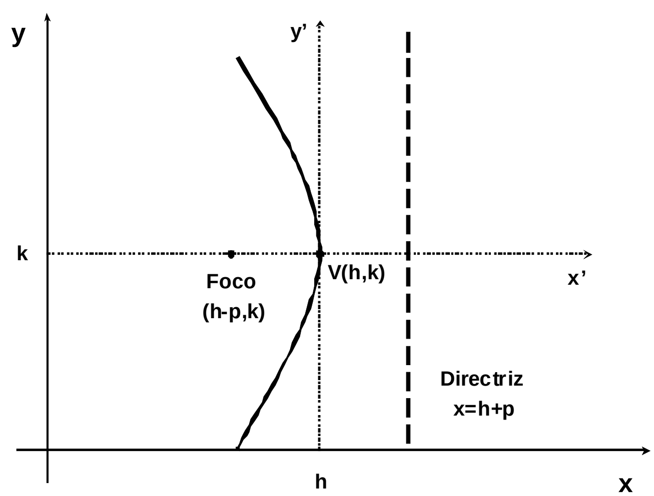
que es la *ecuación trasladada de la parábola* con vértice en (h,k) con $EP: eje\ x$

El vértice en este caso está en: $V(h,k)$

El foco se ubica en: $F(h+p,k)$

La ecuación de la directriz es: $x = h - p$

Similarmente, si el vértice de la parábola se ubica en (h,k) con $EP: eje\ x$, pero si se abre a la izquierda, se tiene ahora la siguiente traslación:



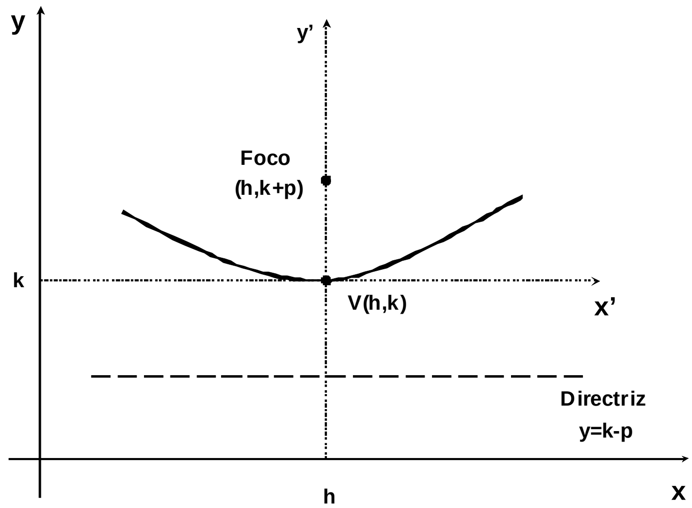
en este caso la ecuación de la parábola trasladada es:

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

El vértice está en: $V(h,k)$
El foco se ubica en: $F(h-p,k)$
La ecuación de la directriz es: $x = h + p$

Cuando el eje de la parábola es el eje y, también se tienen dos casos en traslación:

Si se abre hacia arriba:

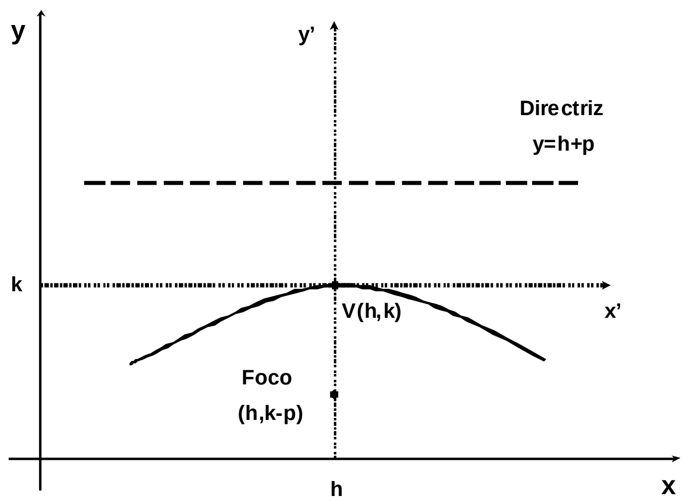


en este caso la ecuación de la parábola es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

El vértice está en: $V(h,k)$
El foco se ubica en: $F(h,k+p)$
La ecuación de la directriz es: $y = k - p$

Si se abre hacia abajo:



aquí, la ecuación de la parábola es:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

El vértice está en: $V(h,k)$
El foco se ubica en: $F(h,k-p)$
La ecuación de la directriz es: $y=k+p$

Para los cuatro casos, la excentricidad siempre es uno y el lado recto de una parábola siempre se calcula igual.

Ejemplos.
En las siguientes parábolas hallar las coordenadas del vértice, del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto, el eje de la parábola y determinar para donde se abren:

1) $(y-3)^2=12(x-2)$
Solución.
$h=2,\ k=3 \quad \Rightarrow \quad V(2,3)$. $4p=12 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{12}{4}=3$. $EP: eje\ x$. El signo es (+), por lo que se abre hacia la derecha.
El foco está en: $F(2+3,3) \quad \Rightarrow \quad F(5,3)$. La ecuación de la directriz es: $x=2-3=-1$. El lado recto es: $LR=|4(3)|=12\ u.$

2) $(y+3)^2=-8(x+4)$
Solución.
$h=-4,\ k=-3 \quad \Rightarrow \quad V(-4,-3)$. $4p=8 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{8}{4}=2$. $EP: eje\ x$. El signo es (-), por lo que se abre hacia la izquierda.
El foco está en: $F(-4-2,-3) \quad \Rightarrow \quad F(-6,-3)$. La ecuación de la directriz es: $x=-4+2=-2$. El lado recto es: $LR=|4(2)|=8\ u.$

3) $(x-5)^2=12(y-2)$
Solución.
$h=5,\ k=2 \quad \Rightarrow \quad V(5,2)$. $4p=12 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{12}{4}=3$. $EP: eje\ y$. El signo es (+), por lo que se abre hacia arriba.
El foco está en: $F(5,2+3) \quad \Rightarrow \quad F(5,5)$. La ecuación de la directriz es: $y=2-3=-1$. El lado recto es: $LR=|4(3)|=12\ u.$

4) $(x+3)^2=-16(y+6)$
Solución.
$h=-3,\ k=-6 \quad \Rightarrow \quad V(-3,-6)$. $4p=16 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{16}{4}=4$. $EP: eje\ y$. El signo es (-), por lo que se abre hacia abajo.
El foco está en: $F(-3,-6-4) \quad \Rightarrow \quad F(-3,-10)$. La ecuación de la directriz es: $y=-6+4=-2$. El lado recto es: $LR=|4(4)|=16\ u.$

IX.3 ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

Partiendo de la ecuación canónica trasladada de la parábola con $EP: eje\ x$:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

si se desarrolla se tiene:

$y^2 - 2yk + k^2 = 4px - 4ph$

acomodando términos:

$y^2 - 4px - 2yk + k^2 + 4ph = 0$

si se efectúan los siguientes cambios de variable:

$D = -4p, \quad E = -2k, \quad F = k^2 + 4ph$

la ecuación queda como:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que es la *ecuación general de la parábola con* $EP: eje\ x$

De forma similar si se toma como base para el análisis la ecuación trasladada con $EP: eje\ y$: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, se obtendrá:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que es la *ecuación general de la parábola con* $EP: eje\ y$.

Nótese como el término x^2 no existe en la primera ecuación y como y^2 no aparece en la segunda. Esto se debe a que siempre el eje de la parábola es aquel que no posee el término cuadrático.

Ejemplos.
Obtener la ecuación general de la parábola en los siguientes casos:

1) Si tiene su vértice en $V(3,2)$ y foco en $F(7,2)$
Solución.
Como las ordenadas no cambian, el $EP: eje\ x$, y se abre a la derecha, entonces:

$p = \overline{VF} = |7-3| = 4 \quad \Rightarrow \quad (y-k)^2 = 4p(x-h) \quad \Rightarrow \quad (y-2)^2 = 4(4)(x-3)$

$\Rightarrow \quad y^2 - 4y + 4 = 16(x-3) \quad \Rightarrow \quad y^2 - 4y + 4 = 16x - 48 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 16x - 4y + 52 = 0$

2) Si tiene su vértice en $V(1,5)$ y directriz $y = 7$.
Solución.
Al tener directriz arriba del vértice, $EP: eje\ y$, y se abre hacia abajo

$p = \overline{DV} = |5-7| = 2 \quad \Rightarrow \quad (x-h)^2 = 4p(y-k) \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 = -4(2)(y-5)$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = -8(y-5) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = -8y + 40 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 8y - 39 = 0$

3) Si tiene su vértice en $V(2,3)$, pasa por el punto $(4,5)$ y tiene $EP: eje\ y$:

Solución.

Al tener $EP: eje\ y$, se aplica la ecuación: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

ahora, sustituyendo el punto (x,y) y el vértice (h,k) para despejar p se tiene:

$$(4-2)^2 = 4p(5-3) \quad \Rightarrow \quad 2^2 = 4p(2) \quad \Rightarrow \quad 4 = 8p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Aplicando de nuevo esta ecuación, se tiene:

$$(x-2)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)(y-3) \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 2(y-3) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 2y - 6$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$$

IX.4 DETERMINACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA PARÁBOLA A PARTIR DE SU ECUACIÓN GENERAL

En la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

generalmente se describe a una parábola si alguno de los términos A o C son igual a cero (pero no simultáneamente). Si $A = 0$, el EP es el eje x, por su parte si $C = 0$, el EP es el eje y.

Para conocer todas las características de una parábola a partir de su ecuación general se procede a factorizar una vez que se completan los trinomios cuadrados perfectos (TCP), a fin de obtener la ecuación ordinaria.

Ejemplos.

Dadas las siguientes ecuaciones de parábolas, encontrar todas sus características:

1) $y^2 + 6x - 4y - 8 = 0$

Solución.

Acomodando convenientemente:

$$y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$$

completando el TCP:

$$y^2 - 4y + 4 + 6x - 8 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 4y + 4 = -6x + 12$$

factorizando el TCP:

$$(y-2)^2 = -6(x-2)$$

ecuación que comparada con: $(y-k)^2 = 4(x-h)$ se tiene que:

$h = 2,\ k = 2 \quad \Rightarrow \quad V(2,2)$. $4p = 6 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. $EP: eje\ x$. El signo es (-), por lo que se abre hacia la izquierda.

El foco está en: $F\left(2 - \frac{3}{2}, 2\right) \quad \Rightarrow \quad F\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. La ecuación de la directriz es: $y = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$. El lado recto es: $LR = \left|4\left(\frac{3}{2}\right)\right| = 6\ u.$

2) $y^2-6x-6y+15=0$

Solución.

Acomodando convenientemente:

$$y^2-6y-6x+15=0$$

completando el TCP:

$$y^2-6y+9-6x+15-9=0 \quad\Rightarrow\quad y^2-6y+9=6x-6$$

factorizando el TCP:

$$(y-3)^2=6(x-1)$$

ecuación que comparada con: $(y-k)^2=4(x-h)$, se tiene que:

$h=1,\ k=3 \quad\Rightarrow\quad V(1,3)$. $4p=6 \quad\Rightarrow\quad p=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. $EP: eje\ x$. El signo es (+), por lo que se abre hacia la derecha.

El foco está en: $F\left(1+\frac{3}{2},3\right) \quad\Rightarrow\quad F\left(\frac{5}{2},3\right)$. La ecuación de la directriz es: $x=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$. El lado recto es: $LR=\left|4\left(\frac{3}{2}\right)\right|=6\,u.$

3) $x^2-2x-8y+33=0$

Solución.

Acomodando convenientemente:

$$x^2-2x-8y+33=0$$

completando el TCP:

$$x^2-2x+1-8y+33-1=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-2x+1=8y-32$$

factorizando el TCP:

$$(x-1)^2=8(y-4)$$

ecuación que comparada con: $(x-h)^2=4(y-k)$ se tiene que:

$h=1,\ k=4 \quad\Rightarrow\quad V(1,4)$. $4p=8 \quad\Rightarrow\quad p=\frac{8}{4}=2$. $EP: eje\ y$. El signo es (+), por lo que se abre hacia arriba.

El foco está en: $F(1,4+2) \quad\Rightarrow\quad F(1,6)$. La ecuación de la directriz es: $y=4-2=2$. El lado recto es: $LR=|4(2)|=8\,u.$

4) $3x^2+6x+16y-29=0$

Solución.

Dividiendo todo por tres y acomodando para convenientemente:

$$x^2+2x+\frac{16}{3}y-\frac{29}{3}=0$$

completando el TCP:

$$x^2+2x+1+\frac{16}{3}y-\frac{29}{3}-1=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+2x+1=-\frac{16}{3}y+\frac{32}{3}$$

factorizando el TCP:

$$(x+1)^2 = -\frac{16}{3}(y-2)$$

ecuación que comparada con: $(x-h)^2 = 4(y-k)$ se tiene que:

$h=-1,\ k=2 \quad \Rightarrow \quad V(-1,2)$. $4p = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\frac{16}{3}}{4} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$. $EP : eje\ y$. El signo es (-), por lo que se abre hacia abajo.

El foco está en: $F\left(-1, 2-\frac{4}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad F\left(-1,\frac{2}{3}\right)$. La ecuación de la directriz es: $y = 2+\frac{4}{3} = \frac{10}{3}$. El lado recto es: $LR = \left|4\left(\frac{4}{3}\right)\right| = \frac{16}{3}\ u.$

5) $y^2 - 5x + 10 = 0$

Solución.

Acomodando para y se tiene:

$$y^2 - 0y - 5x + 10 = 0$$

completando el TCP:

$$y^2 - 0y + 0 - 5x + 10 - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 0y + 0 = 5x - 10$$

factorizando el TCP:

$$(y-0)^2 = 5(x-2)$$

ecuación que comparada con: $(y-k)^2 = 4(x-h)$ se tiene que:

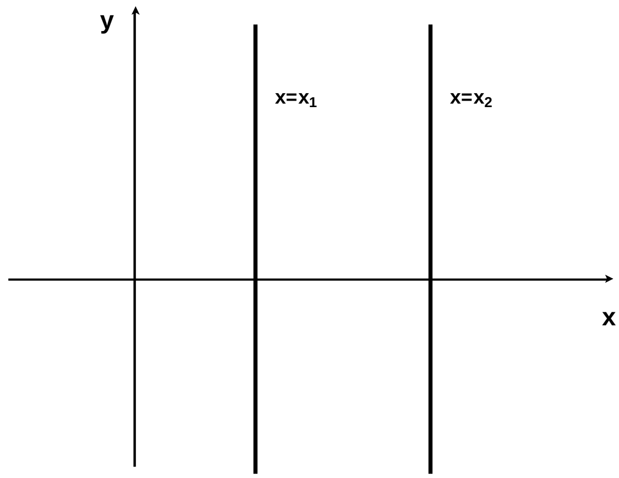
$h=2,\ k=0 \quad \Rightarrow \quad V(2,0)$. $4p = 5 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{5}{4}$. $EP : eje\ x$. El signo es (+), por lo que se abre hacia la derecha.

El foco está en: $F\left(2+\frac{5}{4},0\right) \quad \Rightarrow \quad F\left(\frac{13}{4},0\right)$. La ecuación de la directriz es: $x = 2-\frac{5}{4} = \frac{3}{4}$. El lado recto es: $LR = \left|4\left(\frac{5}{4}\right)\right| = 5\,u.$

IX.5 CASO DEGENERADO DE LA PARÁBOLA

Si en la ecuación general de la parábola $x^2 + Dx + Ey + F = 0$, el término E es igual a cero, entonces la ecuación resultante $x^2 + Dx + F = 0$ no describe a una parábola, sino a un par de rectas paralelas o coincidentes al eje y que surgen de la solución de la ecuación de segundo grado.

Gráficamente esto es:



Ejemplo.

Determinar las características de la siguiente ecuación: $x^2 - 7x + 12 = 0$

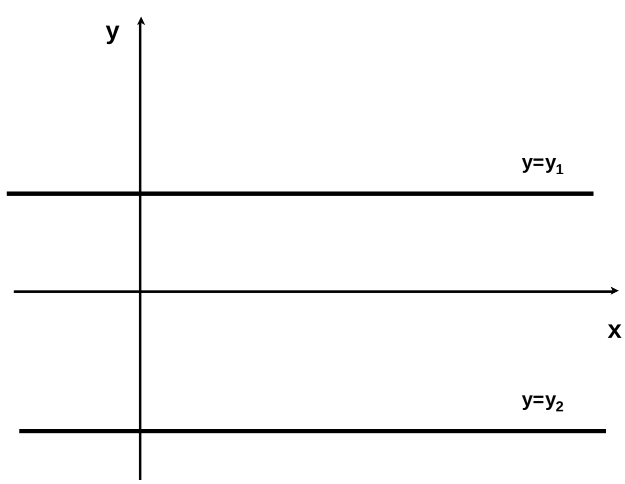
Solución.

Al faltar el término Ey , se trata de un caso degenerado de la parábola. Aplicando la fórmula general (aunque también puede resolverse por factorización):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \ ; \quad x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Por su parte, si en la ecuación general de la parábola $y^2 + Dx + Ey + F = 0$, el término D es igual a cero, entonces la ecuación resultante $y^2 + Ey + F = 0$ no describe a una parábola, sino a un par de rectas paralelas o coincidentes al eje x que surgen de la solución de la ecuación de segundo grado. Gráficamente esto es:



Ejemplo.

Determinar las características de la siguiente ecuación: $2y^2 - 10y + 12 = 0$

Solución.

Al faltar el término Dx, se trata de un caso degenerado de la parábola. Aplicando la fórmula general:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(2)(12)}}{2(2)} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{4} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{10 \pm 2}{4}$$

$$y_1 = \frac{10+2}{4} = \frac{12}{4} = 3; \quad y_2 = \frac{10-2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

IX.6 APLICACIONES

La parábola posee diversas aplicaciones físicas muy interesantes, en la que destaca su propiedad de reflexión: Si en un objeto de forma parabólica se hace incidir una señal (en general una onda electromagnética) que proviene de su foco se refleja en él siguiendo una línea paralela a su eje. En la realidad, estos objetos reciben el nombre de paraboloides, los cuales giran alrededor de sus ejes.

De manera inversa, si en un objeto de forma parabólica se hace incidir una señal de forma paralela a su eje, se refleja de forma tal que se concentra en su foco.

Considerando esta propiedad de reflexión de la de la parábola, existen muchas aplicaciones útiles, en las que sobresalen:

- En el diseño de espejos reductores o amplificadores.
- En las antenas que reciben señales vía satélite.
- En los reflectores y lámparas.
- En telescopios (los rayos paralelos provenientes de una estrella lejana que entran son enfocados hacia un solo punto).
- El diseño de faros buscadores (la fuente de luz se coloca en el foco).
- En bóvedas (es famosa la de los murmullos, en que se puede escuchar la voz con mucha nitidez en cualquier lugar independientemente de la amplitud y posición de quien la origina)
- El sonido y las ondas electromagnéticas obedecen las mismas leyes de la reflexión de la luz, por lo que se usan micrófonos parabólicos para recoger y concentrar sonidos que provienen de diversos puntos.

En el campo de la cinemática, la parábola también es aplicable ya que cuando se lanza un proyectil de forma no vertical al aire, describe una trayectoria de tipo parabólico. A este concepto famoso en Física se le conoce como tiro parabólico y de acuerdo con sus ecuaciones se puede conocer la velocidad a la que llega, la altura máxima que alcanza y el tiempo que tarda todo en su recorrido.

En Ingeniería Civil y en Arquitectura, también tiene aplicaciones la parábola, siendo las más conocidas:

- El cable de suspensión de un puente uniformemente cargado toma la forma de una parábola.
- En construcciones modernas, muchos techos son paraboloides
- El diseño parabólico de puentes de arco.
- En aerodinámica e hidrodinámica: las alas, quillas[1] y timones.

[1] Quilla es la pieza longitudinal que va de proa a popa, formando el canto o arista inferior del casco, y que constituye el eje del barco y la base del armazón.