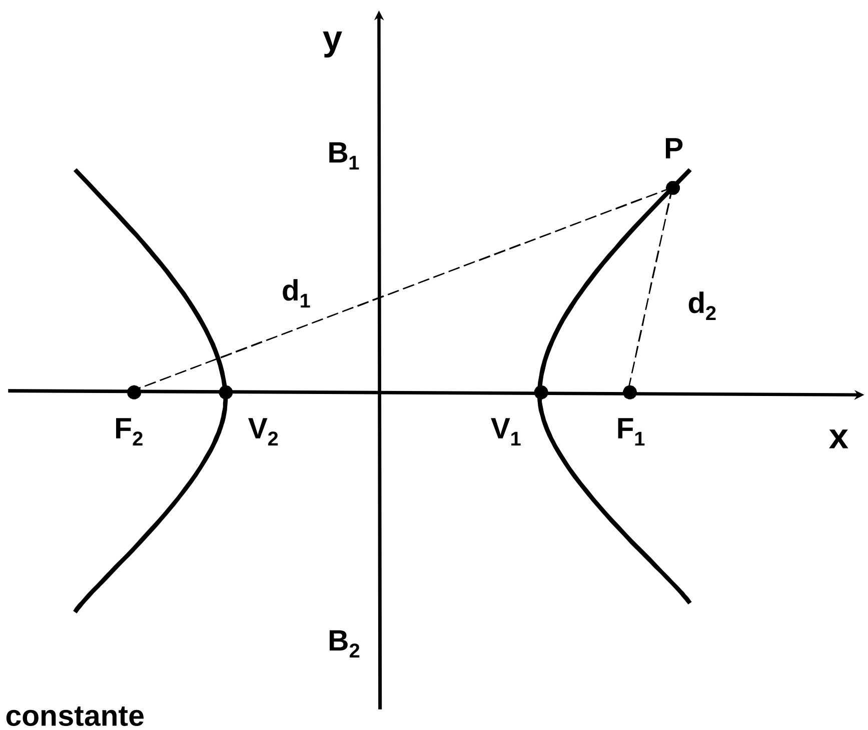
HIPÉRBOLA

UNIDAD XI

XI.1 DEFINICIÓN DE HIPÉRBOLA

Una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano, tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos en el plano es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman *focos*. Gráficamente esto es:



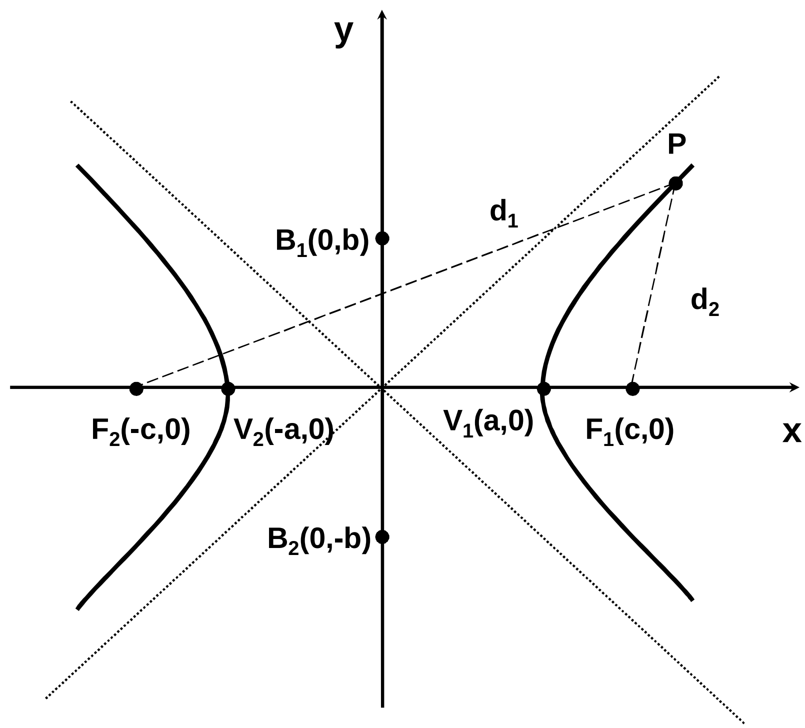
Con relación a la figura, el segmento de recta $\overline{V_2V_1}$ que pasa por los focos es el *eje real*. La mediatriz $\overline{B_2B_1}$ del eje real es el *eje imaginario*. Cada extremo del eje real V_1 y V_2 se llama vértice. El punto medio del segmento $\overline{F_2F_1}$ se llama *centro* de la hipérbola. La distancia del centro a cada vértice se llama *semieje real* y la distancia del centro a cada extremo del eje imaginario se conoce como *semieje imaginario*[1].

XI.2 ECUACIÓN ORDINARIA DE LA HIPÉRBOLA HORIZONTAL CON CENTRO EN EL ORIGEN

A partir de la definición de la hipérbola y de la expresión para calcular la distancia entre dos puntos, se puede deducir la ecuación de una hipérbola en un sistema de coordenadas rectangulares.

[1] Algunos textos, definen al eje real como eje *transverso* y al eje imaginario como eje *conjugado*.

Si los vértices se ubican en las coordenadas $V_1(a,0)$ y $V_2(-a,0)$, los focos están en $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$, el eje real de la hipérbola es coincidente al eje x, y si su centro se ubica en el origen, tiene la siguiente forma:



Si el punto P está en cualquiera de los vértices, la diferencia de distancias $d_1 - d_2$ da como resultado $a-c-(-c-a)$, por lo que la suma constante se establece en $2a, \quad a>0$.

El punto $P(x,y)$ pertenecerá a la hipérbola si y sólo si: $d_1 - d_2 = 2a$,
por lo tanto:

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

que equivale a:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevando ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

desarrollando:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

eliminando términos iguales:

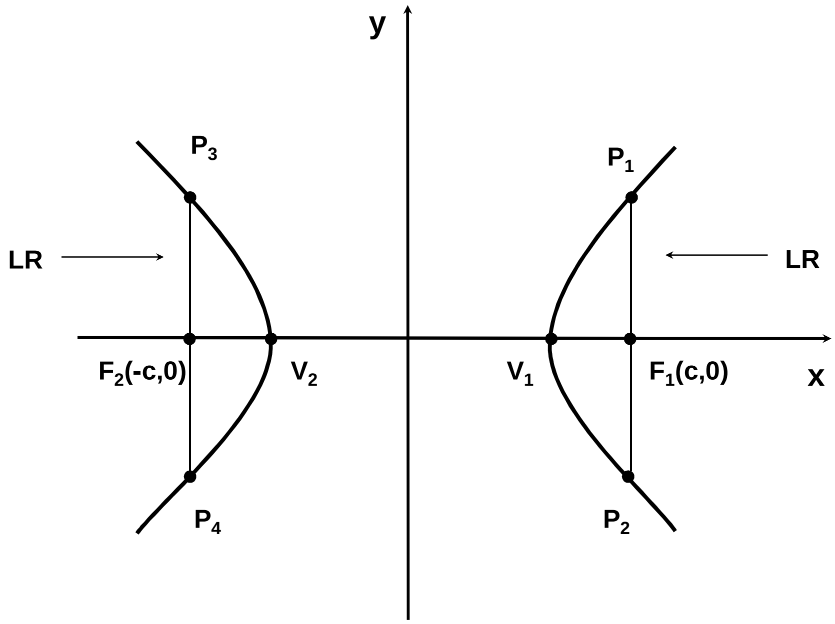
$$2xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc$$
que equivale a:
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4xc - 4a^2$$
dividiendo todo por 4:
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2$$
elevando nuevamente al cuadrado ambos miembros:
$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(xc - a^2\right)^2$$
$$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) = \left(xc - a^2\right)^2$$
$$a^2\left(x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right) = \left(xc - a^2\right)^2$$
$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4$$
reduciendo términos semejantes:
$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 + a^4$$
invirtiendo nuevamente los miembros:
$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$
acomodando convenientemente:
$$x^2c^2 - x^2a^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$
factorizando x^2 en el primer miembro y a^2 en el segundo miembro:
$$x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$
si se denota como b^2 a la expresión $c^2 - b^2$, y se sustituye se tiene que:
$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$
dividiendo por a^2b^2 toda la expresión:
$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$
finalmente queda como:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ecuación conocida como *ecuación ordinaria* o *canónica de la hipérbola horizontal con centro en el origen*, de semieje real a y de semieje imaginario b.

Una de las asíntotas pasa por el origen y el punto (a,b), por lo que su ecuación está dada por: $\frac{y-0}{x-0} = \frac{0-b}{0-a} = \frac{b}{a}$. La otra asíntota pasa por el origen y el punto $(-a,b)$, por lo que su ecuación está dada por: $\frac{y-0}{x-0} = \frac{0-b}{0-(-a)} = -\frac{b}{a}$. Esto significa que las ecuaciones de las asíntotas para este caso son: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

X.3 LONGITUD DE LOS LADOS RECTOS DE UNA HIPÉRBOLA HORIZONTAL

Para cualquier hipérbola, los segmentos perpendiculares al eje real que pasan por sus focos y que incluyen a los extremos de la curva se denominan *lados rectos* (LR). Gráficamente es:



Para encontrar las coordenadas de los extremos del lado recto, que pasa por el foco F_1, se sustituye x por c en la ecuación despejada para y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}$$

pero como $b^2 = c^2 - a^2$, se tiene:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} = \pm\frac{b}{a}b = \pm\frac{b^2}{a}$$

por lo cual, las coordenadas de los extremos P_1 y P_2 del lado recto asociado a F_1 son:

$$P_1\left(c, \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } P_2\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

Similarmente, para encontrar las coordenadas de los extremos del lado recto que pasa por el foco F_2, el procedimiento es idéntico al tomar en cuenta que los puntos P_3 y P_4 son simétricos a los puntos P_1 y P_2 con respecto al eje x, con lo que se tienen la mismas ordenadas respectivas, por lo que las coordenadas de los extremos P_3 y P_4 del lado recto asociado a F_2 son:

$$P_3\left(-c, \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } P_4\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

La longitud, medida en unidades lineales (u), de cada lado recto viene dado por la diferencia de sus ordenadas. Por lo tanto:

$$LR=\frac{2b^2}{a}$$

X.4 EXCENTRICIDAD DE UNA HIPÉRBOLA

Para cualquier hipérbola, a la relación que existe entre c y a, se le conoce como su *excentricidad* y se denota con la letra e:

$$e=\frac{c}{a}$$

Como el valor de c (foco) es más grande que el a (vértice), siempre se cumple que $e>1$.

Ejemplos.
Calcular las longitudes de los semiejes real e imaginario, las coordenadas de los vértices, focos, la longitud del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas de las siguientes hipérbolas:

1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

Solución.
El eje real es x. $a^2=25,\ b^2=9\ \Rightarrow\ a=5,\ b=3$
los vértices se encuentran en: $V_1(5,0)$ y $V_2(-5,0)$
los extremos del eje imaginario están en: $B_1(0,3)$ y $B_2(0,-3)$
obteniendo c:
$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$
los focos se ubican en: $F_1\left(\sqrt{34},0\right)$ y $F_2\left(-\sqrt{34},0\right)$
La excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{34}}{5}>1$. El lado recto es: $LR=\frac{2(3)^2}{5}=\frac{2(9)}{5}=\frac{18}{5}\,u.$
las ecuaciones de las asíntotas son: $y=\pm\frac{3}{5}x$, es decir: $y=\frac{3}{5}x$ y $y=-\frac{3}{5}x$

2) $8x^2-12y^2=96$
Solución.
Dividiendo todo por 96:
$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$
De la ecuación se deduce que: $a=\sqrt{12}$ y $b=\sqrt{8}$.
obteniendo c:

$c=\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}=\sqrt{20}$

los vértices se ubican en $V_1\left(\sqrt{12},0\right)$ y $V_2\left(-\sqrt{12},0\right)$

los extremos del eje imaginario están en: $B_1\left(0,\sqrt{8}\right)$ y $B_2\left(0,-\sqrt{8}\right)$

los focos se encuentran en: $F_1\left(\sqrt{20},0\right)$ y $F_2\left(-\sqrt{20},0\right)$

la excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>1$. El lado recto es: $LR=\frac{2\left(\sqrt{8}\right)^2}{\sqrt{12}}=\frac{2(8)}{\sqrt{12}}=\frac{16}{\sqrt{12}}\,u.$

las ecuaciones de las asíntotas son: $y=\pm\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}}x$, es decir: $y=\sqrt{\frac{2}{3}}x$ y $y=-\sqrt{\frac{2}{3}}x$

Ejemplo.

Si se sabe que se tiene un foco en $V_1(10,0)$ y un vértice en $F_2(-8,0)$, obtener las características de la hipérbola.

Solución.

Por simetría se deduce que el otro vértice está en $V_2(-10,0)$ y el otro foco en: $F_1(8,0)$

obteniendo b:

$b=\sqrt{c^2-a^2} \quad \Rightarrow \quad b=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$

la ecuación buscada es: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

la excentricidad es: $e=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}>1$. El lado recto es: $LR=\frac{2(6)^2}{8}=\frac{2(36)}{8}=\frac{72}{8}=9\,u.$

las ecuaciones de las asíntotas son: $y=\pm\frac{6}{8}x$, es decir: $y=\frac{3}{4}x$ y $y=-\frac{3}{4}x$

X.5 ECUACIÓN ORDINARIA DE LA HIPÉRBOLA VERTICAL CON CENTRO EN EL ORIGEN

El procedimiento para obtener la ecuación de la hipérbola vertical es muy similar al que se hizo con la hipérbola horizontal.

En este caso, los vértices y focos están sobre el eje y en las coordenadas $V_1(0,a)$, $V_2(0,-a)$, $F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$, respectivamente, y aplicando la expresión de distancia entre dos puntos se tiene que:

$\sqrt{(x-0)^2+(y-(-c))^2}-\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=2a$

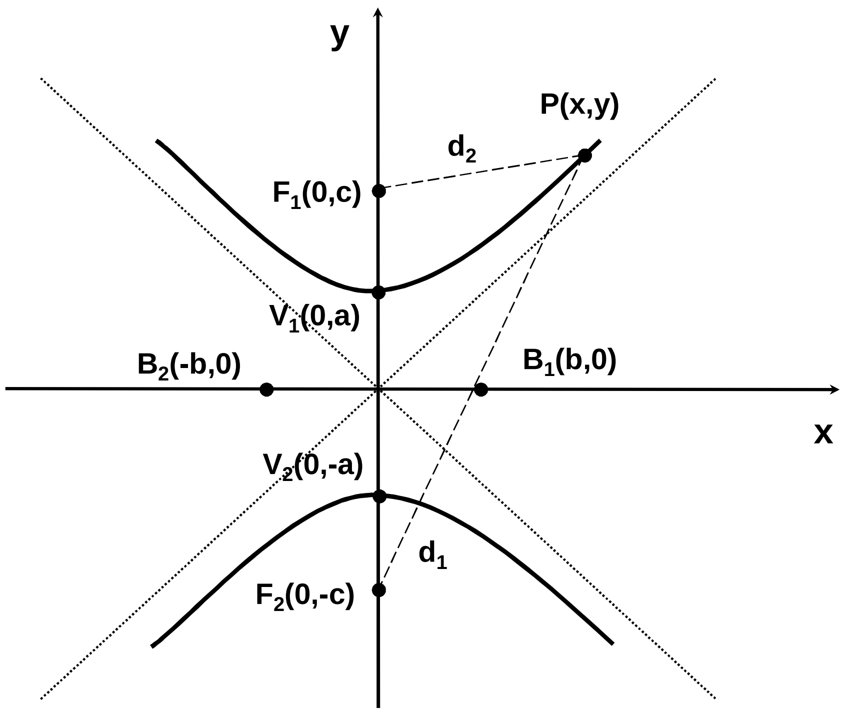
que equivale a:

$\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2a+\sqrt{x^2+(y-c)^2}$

después de desarrollar, eliminar radicales y simplificar, se llega a:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

ecuación conocida como ecuación ordinaria o *canónica de la hipérbola vertical con centro en el origen*, de semieje real a y de semieje imaginario b. La hipérbola en este caso tendría la siguiente forma:



Una de las asíntotas pasa por el origen y el punto (b,a), por lo que su ecuación está dada por: $\frac{y-0}{x-0}=\frac{0-a}{0-b}=\frac{a}{b}$. La otra asíntota pasa por el origen y el punto $(-b,a)$, por lo que su ecuación está dada por: $\frac{y-0}{x-0}=\frac{0-a}{0-(-b)}=-\frac{a}{b}$. Esto significa que las ecuaciones de las asíntotas para este caso son: $y=\pm\frac{a}{b}x$.

X.6 LONGITUD DE LOS LADOS RECTOS DE UNA HIPÉRBOLA VERTICAL

Para encontrar las coordenadas de los extremos del lado recto de una hipérbola vertical, que pasa por el foco F_1, se sustituye el valor de y por c en la ecuación despejada para x:

$$x=\pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}$$

pero como $b^2=c^2-a^2$, se tiene:

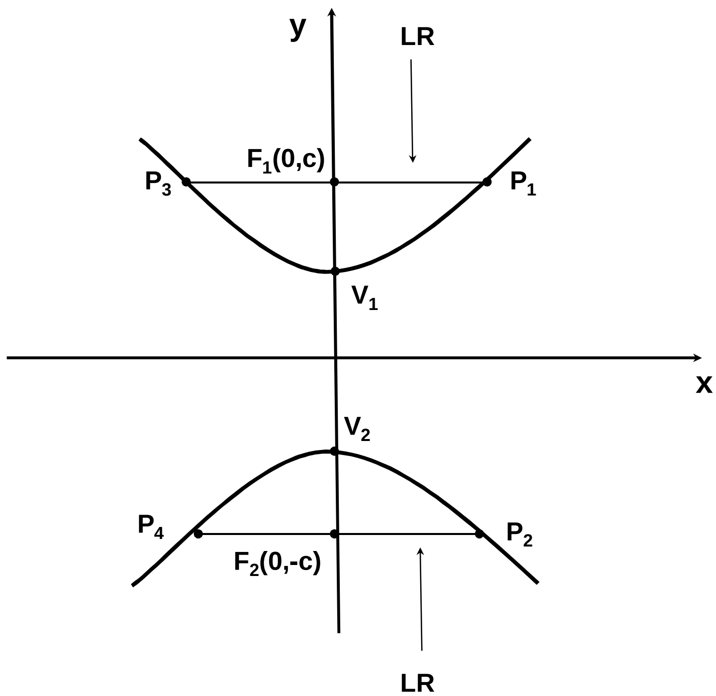
$$x=\pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2}=\pm\frac{b}{a}b=\pm\frac{b^2}{a}$$

por lo cual, las coordenadas de los extremos P_1 y P_2 del lado recto asociado a F_1 son:

$$P_1\left(\frac{b^2}{a},c\right) \text{ y } P_2\left(-\frac{b^2}{a},c\right)$$

Similarmente, para encontrar las coordenadas de los extremos del lado recto que pasa por el foco F_2, el procedimiento es idéntico al tomar en cuenta que los puntos P_3 y P_4 son simétricos a los puntos P_1 y P_2 con respecto al eje y, con lo que se tienen la mismas ordenadas respectivas, por lo que las coordenadas de los extremos P_3 y P_4 del lado recto asociado a F_2 son:

$$P_1\left(\frac{b^2}{a},-c\right) \text{ y } P_2\left(-\frac{b^2}{a},-c\right)$$



La longitud, medida en unidades lineales (u), de cada lado recto viene dado por la diferencia de sus abscisas. Por lo tanto:

$$LR=\frac{2b^2}{a}.$$

Ejemplos.

1) Obtener todas las características de la hipérbola de ecuación: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

Solución.

De la ecuación se deduce que: $a=\sqrt{9}=3$ y $b=\sqrt{16}=4$

obteniendo c:

$$c=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

los vértices se ubican en $V_1(0,3)$ y $V_2(0,-3)$

los extremos del eje imaginario están en: $B_1(4,0)$ y $B_2(-4,0)$

los focos se encuentran en: $F_1(0,5)$ y $F_2(0,-5)$

la excentricidad es: $e=\frac{5}{3}>1$. El lado recto es: $LR=\frac{2(4)^2}{3}=\frac{2(16)}{3}=\frac{32}{3}\,u.$

las ecuaciones de las asíntotas son: $y=\pm\frac{3}{4}x$, es decir: $y=\frac{3}{4}x$ y $y=-\frac{3}{4}x$

2) Obtener todas las características de la hipérbola con focos en $F(0,\pm 6)$ y que tiene asíntotas de ecuaciones: $y=\pm\frac{4}{5}x$.

Solución.

De los datos se deduce que: $c=6$ y que el eje real es y

De las ecuaciones de las asíntotas se despeja a:

$$y=\pm\frac{a}{b}x \quad \therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{4}{5}b$$

pero también se sabe que:

$$c=\sqrt{a^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad 6=\sqrt{\left(\frac{4}{5}b\right)^2+b^2}=\sqrt{\frac{16}{25}b^2+b^2}=\sqrt{\frac{41}{25}b^2}=6 \quad \therefore \quad b=\frac{6}{\sqrt{\frac{41}{25}}}=\frac{30}{\sqrt{41}}$$

$$\Rightarrow \quad a=\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{30}{\sqrt{41}}\right)=\frac{24}{\sqrt{41}}$$

por lo tanto, la ecuación buscada es:

$$\frac{y^2}{\left(\frac{24}{\sqrt{41}}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(\frac{30}{\sqrt{41}}\right)^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{41y^2}{576}-\frac{41x^2}{900}=1$$

los vértices están en $V\left(0,\pm\frac{24}{\sqrt{41}}\right)$, la excentricidad es: $e=\frac{6}{\frac{24}{\sqrt{41}}}=\frac{6\sqrt{41}}{24}=\frac{\sqrt{41}}{4}>1$

la longitud del lado recto es: $LR=\frac{2\left(\frac{30}{\sqrt{41}}\right)^2}{\frac{24}{\sqrt{41}}}=\frac{2\left(\frac{900}{41}\right)}{\frac{24}{\sqrt{41}}}=\frac{\frac{1800}{41}}{\frac{24}{\sqrt{41}}}=\frac{75}{\sqrt{41}}\,u.$

X.7 ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA HORIZONTAL CUANDO SU CENTRO ES CUALQUIER PUNTO DEL PLANO

Si el centro de la hipérbola horizontal es el punto $C(h,k)$, que es el origen del sistema coordenado $x'-y'$, su ecuación ordinaria viene dada por:

$$\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1$$

pero teniendo en cuenta las fórmulas de traslación:

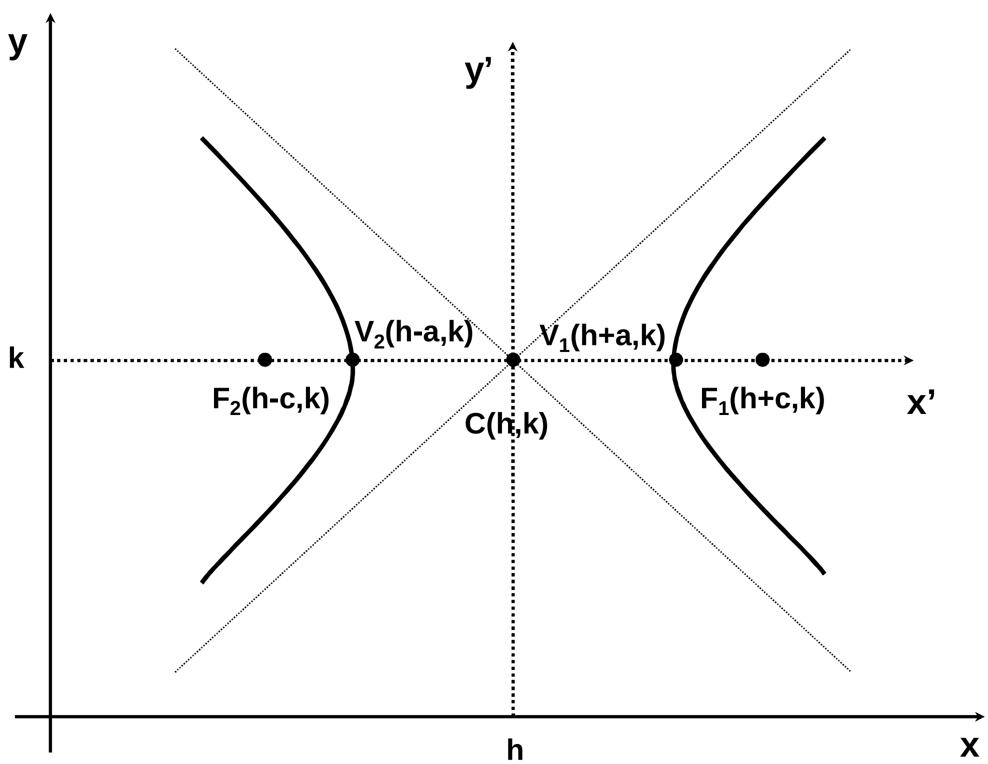
$x'=x-h$ y $y'=y-k$

y sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

que es la *ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal con centro en* $C(h,k)$, de semieje real a y de semieje imaginario b.

La siguiente figura muestra este caso:



De la figura se puede apreciar que los vértices están en: $V_1(h+a,k)$ y $V_2(h-a,k)$, los extremos del eje imaginario están en: $B_1(h,k+b)$ y $B_2(h,k-b)$, por su parte, los focos se ubican en $F_1(h+c,k)$ y $F_2(h-c,k)$. La longitud del lado recto sigue siendo $LR=\frac{2b^2}{a}$, los extremos de los lados rectos son: $\left(h\pm c,k\pm\frac{b^2}{a}\right)$ y las ecuaciones de las asíntotas son: $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$.

Ejemplo.

Encontrar todos los elementos de la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{36}=1$

Solución.

De la ecuación se aprecia que $h=-1$ y $k=5$

por lo tanto, el centro se ubica en $C(-1,5)$.

Por otra parte, se tiene:

$a^2=9,\ b^2=36\ \Rightarrow\ a=3,\ b=6$

los vértices están en: $V(-1\pm 3,5)$ que equivale a:

$V_1(2,5)$ y $V_2(-4,5)$

obteniendo c:

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

los focos se ubican en: $F\left(-1\pm 3\sqrt{5},5\right)$ que equivale a:

$F_1\left(-1+3\sqrt{5},5\right)$ y $F_2\left(-1-3\sqrt{5},5\right)$

la excentricidad es: $e=\frac{3\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}>1$.

el lado recto es: $LR=\frac{2(6)^2}{3}=\frac{2(36)}{3}=24\,u.$

las ecuaciones de las asíntotas son: $y-5=\pm\frac{6}{3}(x+1)$, que equivale a: $y-5=\pm 2(x+1)$

desarrollando y reduciendo se obtienen las rectas: $2x-y+7=0$ y $2x+y-3=0$.

X.8 ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA VERTICAL CUANDO SU CENTRO ES CUALQUIER PUNTO DEL PLANO

Si el centro de la hipérbola vertical es el punto $C(h,k)$, que es el origen del sistema coordenado $x'-y'$, su ecuación ordinaria viene dada por:

$$\frac{(y')^2}{a^2}-\frac{(x')^2}{b^2}=1$$

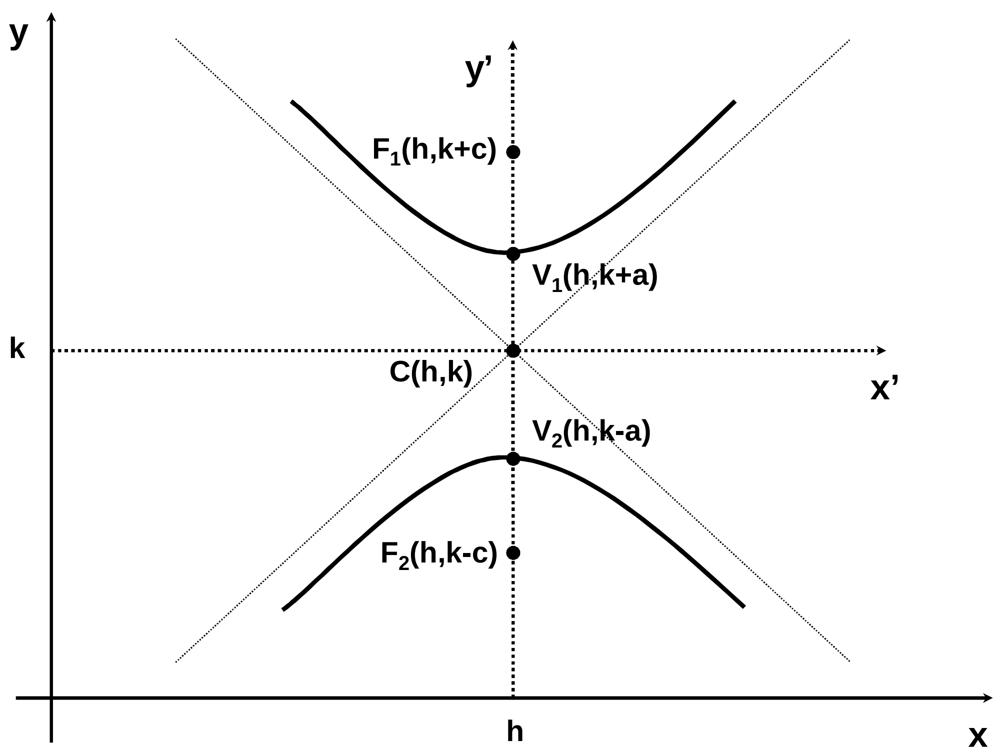
pero teniendo en cuenta las fórmulas de traslación:

$x' = x - h$ y $y' = y - k$

y sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

que es la *ecuación ordinaria de la hipérbola vertical con centro en* $C(h,k)$, de semieje real a y de semieje imaginario b. La siguiente figura muestra este caso:



De la figura se puede apreciar que los vértices están en: $V_1(h,k+a)$ y $V_2(h,k-a)$ y los focos se ubican en $F_1(h,k+c)$ y $F_2(h,k-c)$. La longitud del lado recto sigue siendo $LR = \frac{2b^2}{a}$, los extremos de los lados rectos son: $\left(h \pm \frac{b^2}{a}, k \pm c\right)$ y las ecuaciones de las asíntotas son: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$.

Ejemplo.
Encontrar la ecuación de la hipérbola y sus características si tiene vértices en $V_1(5,1)$ y $V_2(5,7)$ y cuya longitud de sus lados rectos es $\frac{8}{3}u.$

Solución.
Como las abscisas de los vértices no cambian, se trata de una hipérbola vertical.

el centro se ubica en $C\left(5,\frac{1+7}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad C(5,4)$, esto es, $h=5$ y $k=4$

así que el semieje real es: $a=7-4=3$

despejando b de la expresión del lado recto:

$$LR=\frac{8}{3}=\frac{2b^2}{3}=\frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad b^2=\frac{3(8)}{2(3)}=4 \quad \therefore \quad b=2$$

así que la ecuación buscada es:

$$\frac{(y-4)^2}{3^2}-\frac{(x-5)^2}{2^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(y-4)^2}{9}-\frac{(x-5)^2}{4}=1$$

obteniendo c:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

los focos se ubican en: $F\left(5,4\pm\sqrt{13}\right)$ que equivale a: $F_1\left(5,4+\sqrt{13}\right)$ y $F_2\left(5,4-\sqrt{13}\right)$

las ecuaciones de las asíntotas son: $y-4=\pm\frac{3}{2}(x-5)$, que equivale a: $2(y-4)=\pm 3(x-5)$

desarrollando y reduciendo se obtienen las rectas: $3x-2y-7=0$ y $3x+2y-23=0$.

X.9 ECUACIÓN GENERAL DE LA HIPÉRBOLA HORIZONTAL

Sea la ecuación ordinaria trasladada de la hipérbola horizontal:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

desarrollando se tiene:

$$\frac{x^2-2xh+h^2}{a^2}-\frac{y^2-2yk+k^2}{b^2}=1$$

multiplicando por a^2b^2:

$$\frac{a^2b^2\left(x^2-2xh+h^2\right)}{a^2}-\frac{a^2b^2\left(y^2-2yk+k^2\right)}{b^2}=a^2b^2(1)$$

$$\Rightarrow \quad b^2\left(x^2-2xh+h^2\right)-a^2\left(y^2-2yk+k^2\right)=a^2b^2$$

$$\Rightarrow \quad b^2x^2-2b^2xh+b^2h^2-a^2y^2+2a^2yk-a^2k^2=a^2b^2$$

acomodando:

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2hx+2a^2ky+b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2=0$$

realizando los siguientes cambios de variable:

$$A=b^2, \quad C=a^2, \quad D=-2b^2h, \quad E=2a^2k, \quad F=b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2$$

la expresión queda como:

$$Ax^2-Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

que es la *ecuación general de la hipérbola horizontal*. Nótese como $A\neq C$, tanto en signo como en magnitud.

Ejemplo.
Obtener la ecuación general de la hipérbola horizontal y sus características si el semieje real igual a seis, el semieje imaginario es cinco y su centro está en $C(3,-4)$.

Solución.
$a=6, \quad b=5$

los vértices están en: $V(3\pm 6,-4) \quad \Rightarrow \quad V_1(9,-4), \quad V_2(-3,-4)$

obteniendo c:

$$c=\sqrt{6^2+5^2} \quad \Rightarrow \quad c=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$$

los focos se ubican en: $F\left(3\pm\sqrt{61},-4\right) \quad \Rightarrow \quad F_1\left(3+\sqrt{61},-4\right), \quad F_2\left(3-\sqrt{61},-4\right)$

la excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{61}}{6}>1$, la longitud del lado recto es: $LR=\frac{2(5)^2}{6}=\frac{2(25)}{6}=\frac{50}{6}=\frac{25}{3}\ u.$.

Las ecuaciones de las asíntotas son: $y+4=\pm\frac{5}{6}(x-3)$, que equivale a: $6(y+4)=\pm 5(x-3)$

desarrollando y reduciendo se obtienen las rectas: $5x-6y-39=0$ y $5x+6y+9=0$.

La ecuación ordinaria trasladada queda:

$$\frac{(x-3)^2}{6^2}-\frac{(y+4)^2}{5^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{36}-\frac{(y+4)^2}{25}=1$$

multiplicando por 900: $25(x-3)^2-36(y+4)^2=900$

desarrollando:

$$25\left(x^2-6x+9\right)-36\left(y^2+8y+16\right)=900 \quad \Rightarrow \quad 25x^2-150x+225-36y^2-288y-576=900$$

acomodando se llega a la ecuación general pedida:

$$25x^2-36y^2-150x-288y-1251=0$$

X.10 ECUACIÓN GENERAL DE LA HIPÉRBOLA VERTICAL

Sea la ecuación ordinaria trasladada de la hipérbola vertical:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

desarrollando se tiene:

$$\frac{y^2-2yk+k^2}{a^2}-\frac{x^2-2xh+h^2}{b^2}=1$$

multiplicando por a^2b^2:

$$\frac{a^2b^2\left(y^2-2yk+k^2\right)}{a^2}-\frac{a^2b^2\left(x^2-2xh+h^2\right)}{b^2}=a^2b^2(1)$$

$$b^2\left(y^2-2yk+k^2\right)-a^2\left(x^2-2xh+h^2\right)=a^2b^2$$

$$b^2y^2-2b^2yk+b^2k^2-a^2x^2+2a^2xh-a^2h^2=a^2b^2$$

acomodando:

$$-a^2x^2+b^2y^2+2a^2hx-2b^2ky-a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2=0$$

realizando los siguientes cambios de variable:

$A = a^2, \quad C = b^2, \quad D = 2a^2h, \quad E = -2b^2k, \quad F = -a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$
la expresión queda como:

$$-Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que es la *ecuación general de la hipérbola vertical*. Adviértase que en este caso el signo negativo lo lleva la variable x.

Ejemplo.

Obtener la ecuación general de la hipérbola con focos en $F_1(1,6)$ y $F_2(1,0)$ y con excentricidad $e = \frac{3}{2}$.

Solución.
Al no cambiar las abscisas de los focos, se trata de una hipérbola vertical con centro en $C\left(1, \frac{6+0}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad C(1,3)$, esto es, $h = 1$ y $k = 3$
obteniendo c:
$c = 6 - 3 = 3$
despejando a de la excentricidad:
$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2c = 3a \quad \therefore \quad a = \frac{2c}{3} = \frac{2(3)}{3} = 2$
obteniendo b:
$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$
así que la ecuación buscada es:
$\frac{(y-3)^2}{2^2} - \frac{(x-1)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$
multiplicando por 20:
$\frac{20(y-3)^2}{4} - \frac{20(x-1)^2}{5} = 20 \quad \Rightarrow \quad 5(y-3)^2 - 4(x-1)^2 = 20$
$5\left(y^2 - 6y + 9\right) - 4\left(x^2 - 2x + 1\right) = 20 \quad \Rightarrow \quad 5y^2 - 30y + 45 - 4x^2 + 8x - 4 = 20$
acomodando se llega a la ecuación general pedida:
$-4x^2 + 5y^2 + 8x - 30y + 21 = 0$

X.11 CARACTERÍSTICAS DE LA HIPÉRBOLA A PARTIR DE SU ECUACIÓN GENERAL

Para transformar la ecuación general de la hipérbola horizontal: $Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ a su ecuación ordinaria: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, o para pasar de la ecuación general de la hipérbola vertical: $-Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ a su respectiva ecuación ordinaria: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, se puede lograr realizando los siguientes pasos:

1. Se reordenan los términos en x y en y
2. Se extrae como factor común al coeficiente de la variable elevada al cuadrado
3. Se completan los cuadrados perfectos(TCP)
4. Se factoriza
5. Se divide entre el término independiente.

Ejemplos.
Obtener todas las características de las siguientes hipérbolas:
1) $5x^2 - 7y^2 + 40x - 84y - 207 = 0$

Solución.
Siguiendo la metodología sugerida, se tiene:

$$5x^2 + 40x - 7y^2 - 84y - 207 = 0$$
$$5(x^2 + 8x) - 7(y^2 + 12y) - 207 = 0$$
$$5(x^2 + 8x + 16) - 7(y^2 + 12y + 36) - 207 - 5(16) + 7(36) = 0$$
$$5(x+4)^2 - 7(y+6)^2 = 207 + 80 - 252 = 35$$
$$\frac{5(x+4)^2}{35} - \frac{7(y+6)^2}{35} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+4)^2}{7} - \frac{(y+6)^2}{5} = 1$$

El eje real es x. Se aprecia que $h = -4, \quad k = -6$, por lo que el centro se ubica en: $C(-4,-6)$

$$a^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{7}, \quad b^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{5}$$

la ubicación de los vértices es: $V_1\left(-4+\sqrt{7},-6\right)$ y $V_2\left(-4-\sqrt{7},-6\right)$
obteniendo c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7+5} = \sqrt{12}$$

los focos se ubican en: $F_1\left(-4+\sqrt{12},-6\right)$ y $F_2\left(-4-\sqrt{12},-6\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}} > 1$. La longitud del lado recto es: $LR = \frac{2\left(\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{7}} = \frac{10}{\sqrt{7}}\ u.$

las ecuaciones de las asíntotas son: $y - 6 = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}(x-4)$

desarrollando y reduciendo se obtienen las rectas:

$\sqrt{5}x - \sqrt{7}y - 4\sqrt{5} + 6\sqrt{7} = 0$ y $\sqrt{5}x + \sqrt{7}y - 4\sqrt{5} - 6\sqrt{7} = 0$

2) $4x^2 - 25y^2 + 24x + 100y + 36 = 0$

Solución.
De acuerdo a la metodología mencionada, se tiene:

$$4x^2 + 24x - 25y^2 + 100y + 36 = 0$$
$$4(x^2 + 6x) - 25(y^2 - 4y) + 36 = 0$$
$$4(x^2 + 6x + 9) - 25(y^2 - 4y + 4) + 36 - 4(9) + 25(4) = 0$$
$$4(x+3)^2 - 25(y-2)^2 = -36 + 36 - 100 = -100$$

$\frac{4(x+3)^2}{-100} - \frac{25(y-2)^2}{-100} = 1$ que equivale a: $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$

El eje real es y. Se aprecia que $h = -3, \quad k = 2$, por lo que el centro se ubica en $C(-3,2)$

$a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{4} = 2, \quad b^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{25} = 5$

la ubicación de los vértices están en: $V_1(-3,4)$ y $V_2(-3,0)$

obteniendo c:

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

los focos se ubican en: $F_1\left(-3,2+\sqrt{29}\right)$ y $F_2\left(-3,2-\sqrt{29}\right)$

la excentricidad es: $e = \frac{\sqrt{29}}{2} > 1.$ La longitud del lado recto es: $LR = \frac{2(5)^2}{2} = 25\,u.$

las ecuaciones de las asíntotas son: $y - 2 = \pm\frac{2}{5}(x+3)$, es decir: $5(y-2) = \pm 2(x+3)$

desarrollando y reduciendo se obtienen las rectas: $2x - 5y + 16 = 0$ y $2x + 5y - 4 = 0$.

3) $4x^2 - 9y^2 - 18y - 45 = 0$

Solución.

Conforme a la metodología expuesta, se tiene:

$4x^2 - 9y^2 - 18y - 45 = 0$

$4\left(x^2 + 0x\right) - 9\left(y^2 + 2y\right) - 45 = 0$

$4\left(x^2 + 0x + 0\right) - 9\left(y^2 + 2y + 1\right) - 45 - 4(0) + 9(1) = 0$

$4(x+0)^2 - 9(y+1)^2 = 45 + 0 - 9 = 36$

$\frac{4(x+0)^2}{36} - \frac{9(y+1)^2}{36} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+0)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

El eje real es x. Se aprecia que $h = 0, \quad k = -1$, por lo que el centro se ubica en $C(0,-1)$.

$a^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{9} = 3, \quad b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{4} = 2$

la ubicación de los vértices es: $V_1(3,-1)$ y $V_2(-3,-1)$

obteniendo c:

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

los focos se ubican en: $F_1\left(\sqrt{13},-1\right)$ y $F_2\left(-\sqrt{13},-1\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1.$ La longitud del lado recto es: $LR = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{8}{3}\,u.$

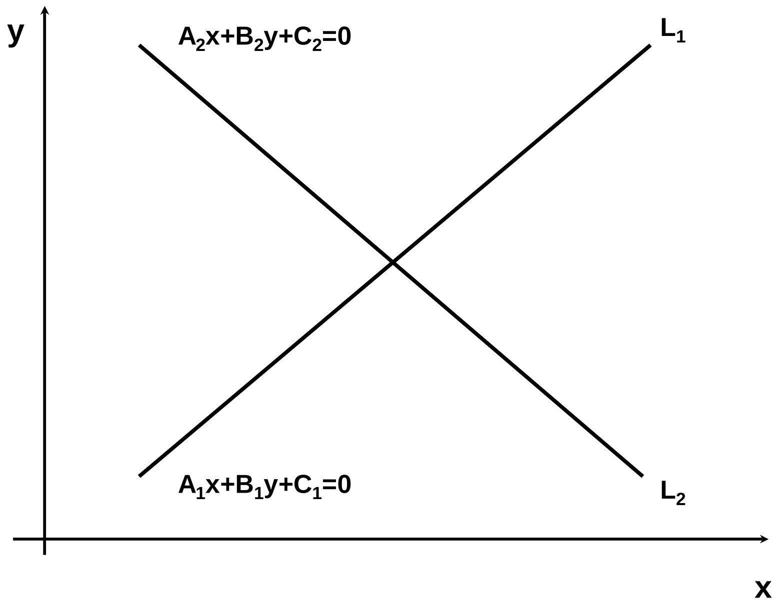
las ecuaciones de las asíntotas son: $y + 1 = \pm\frac{2}{3}(x-3)$, esto es: $3(y+1) = \pm 2(x-3)$

desarrollando y reduciendo se obtienen las rectas:

$2x - 3y - 9 = 0$ y $2x + 3y - 3 = 0$

XI.12 CASO ESPECIAL O DEGENERADO DE UNA HIPÉRBOLA

Si en el proceso de transformación de la ecuación general a la ecuación ordinaria sucede que el término independiente es cero, el resultado no es una hipérbola *sino dos rectas no paralelas* que surgen de la factorización de la diferencia de dos cuadrados. Gráficamente esto es:



Ejemplos.
Obtener todas las características de las siguientes ecuaciones:

1) $9x^2 - 25y^2 = 0$

Solución.
Se sabe que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, por lo tanto si se aplica se tiene que:
$(3x+5y)(3x-5y)=0$, y las rectas que se cruzan son: $3x+5y=0$ y $3x-5y=0$

2) $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 32 = 0$

Solución.
Acomodando las variables: $4x^2 - 24x - y^2 - 4y + 32 = 0$
Ahora, siguiendo el procedimiento planteado:

$$4\left(x^2-6x\right)-1\left(y^2+4y\right)+32=0$$

$$4\left(x^2-6x+9\right)-1\left(y^2+4y+4\right)+32-4(9)+1(4)=0$$

$$4(x-3)^2-1(y+2)^2=-32+36-4$$

$$4(x-3)^2-1(y+2)^2=0$$

factorizando: $\left[2(x-3)+1(y+2)\right]\left[2(x-3)-1(y+2)\right]=0$

separando las variables se tiene:
$$2(x-3)+1(y+2)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-6+y+2=0 \quad \Rightarrow \quad 2x+y-4=0$$
y $2(x-3)-1(y+2)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-6-y-2=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-y-8=0$

3) $-9x^2+16y^2-96y+144=0$

Solución.

Acomodando las variables: $-9x^2+16y^2-96y+144=0$

Ahora, siguiendo el procedimiento planteado:
$$-9\left(x^2-0x\right)+16\left(y^2-6y\right)+144=0$$
$$-9\left(x^2-0x+0\right)+16\left(y^2-6y+9\right)+144+9(0)-16(9)=0$$
$$-9(x-0)^2+16(y-3)^2=-144+144$$
$$-9(x-0)^2+16(y-3)^2=0$$
$$16(y-3)^2-9(x-0)^2=0$$
factorizando: $[4(y-3)+3(x-0)][4(y-3)-3(x-0)]=0$

separando las variables. Se tiene:
$$4(y-3)+3(x-0)=0 \quad \Rightarrow \quad 4y-12+3x+0=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+4y-12=0$$
y $4(y-3)-3(x-0)=0 \quad \Rightarrow \quad 4y-12-3x+0=0 \quad \Rightarrow \quad 3x-4y+12=0.$

XI.12 APLICACIONES

Algunas aplicaciones de la hipérbola se pueden encontrar en:

1. En la localización de epicentros de movimientos telúricos a través de sismógrafos.
2. La naturaleza de la hipérbola se aprovecha en el diseño de telescopios reflectores.
3. En la navegación se utiliza la definición de la hipérbola: un barco se encuentra sobre una hipérbola cuyos focos están en la posición de dos estaciones. La razón de esto es que la diferencia constante de tiempo entre las señales emitidas desde cada estación corresponde a una diferencia constante entre las distancias del barco a cada estación. Mediante la utilización de la hipérbola se puede saber la localización exacta del barco[2].
4. Investigaciones de física atómica han demostrado que las partículas alfa apuntadas hacia el núcleo de un átomo son repelidas y siguen una trayectoria hiperbólica.
5. Las trayectorias de los algunos cometas externos del sistema solar que son atraídos por la gravedad del Sol, describen una órbita hiperbólica, considerando que en uno de los focos está el Sol. Al describir este movimiento, estos cometas escaparán nuevamente de este sistema.
6. En el diseño de algunos arcos y cúpulas de construcciones modernas.
7. Una relación hiperbólica determina que dos cantidades son inversamente proporcionales

[2] Este sistema de navegación recibe el nombre de LORAN.