CONJUNTOS

UNIDAD II

I.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE CONJUNTOS

Un *conjunto* es la agrupación en un todo de objetos bien definidos y diferenciables entre si, que se llaman elementos del mismo. Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas.

Si a es un elemento del conjunto A se denota con la relación de pertenencia $a \in A$. En caso contrario, si a no es un elemento de A se denota $a \notin A$.

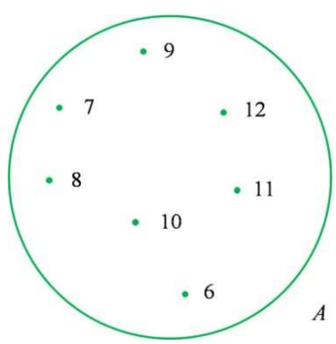
Ejemplos de conjuntos.
1) Si S es el conjunto de los planetas del sistema solar, entonces: Marte $\in S$.
2) Si V representa al conjunto de las letras vocales, entonces: $e \in V$.
3) Si M es el conjunto de los meses del año, entonces: jueves $\notin M$.

Los conjuntos se pueden expresar mediante tres formas:

- Por *extensión*, enumerando todos y cada uno de sus elementos entre llaves.
- Por *comprensión*, estableciendo la característica que poseen.
- Por *Diagramas de Venn*, que son dibujos con formas cerradas que contienen a sus elementos. Esta forma es útil para representar gráficamente las operaciones.

Ejemplo.
Dado el conjunto A de los números naturales mayores de 5 y menores a 13, expresarlos en las tres formas:

Solución.
Por extensión: $A = \{ 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$
Por comprensión: $A = \{ x \mid x \in \mathbf{N},\ 5 < x < 13 \}$
Por diagramas de Venn:



Al conjunto carece de elementos se le llama *conjunto vacío* y se denota por: ϕ o por $\{ \}$.

Cuando en determinado contexto se consideran siempre conjuntos que son partes de uno dado U, se suele considerar a dicho U como *conjunto universal* o de referencia.

Se dice que un conjunto es un *subconjunto* cuando está contenido en otro. Si A está contenido en B, entonces A es subconjunto de B y se denota como $A \subseteq B$.

Todo conjunto A es subconjunto de si mismo. En ese caso se dice que A es un subconjunto *impropio* y se denota como $A \subset A$.

Para cualquier conjunto A se verifica que $\phi \subseteq A$.

Ejemplo.
Si $A = \{ x \mid x$ son las letras del alfabeto $\}$
Entonces el conjunto $B = \{ x \mid x$ son las letras vocales $\}$ y $C = \{ b, k, r, w, z \}$ son subconjuntos del conjunto A.

Dos conjuntos A y B se dicen *iguales* si tienen los mismos elementos y se denota $A = B$. Esto es: $A = B$, si se cumple simultáneamente que: $A \subset B$ y $B \subset A$. El orden de los elementos de cada conjunto no importa.

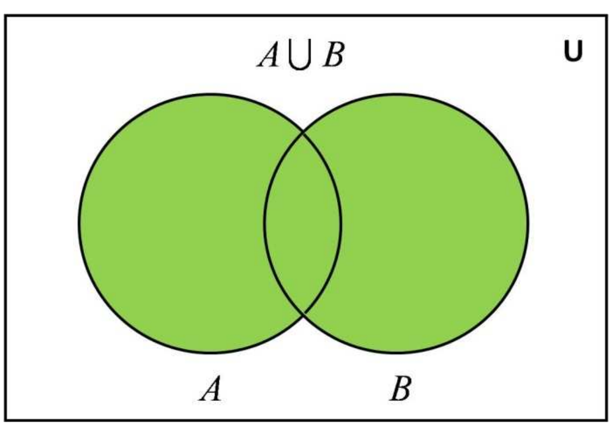
Ejemplo.
Dados los siguientes conjuntos:
$P = \{ x \mid x$ son los puntos cardinales $\}$
$Q = \{$ oeste, norte, este, sur $\}$
$P = Q$

Un conjunto es *finito* si el proceso de contar sus elementos puede terminar. En caso contrario, el conjunto es *infinito*.

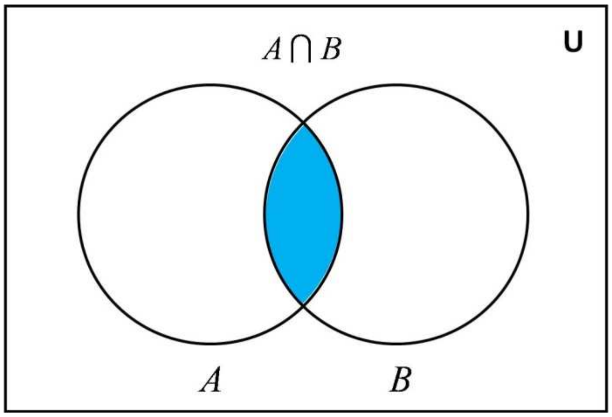
Ejemplos.
El conjunto $E = \{ x \mid x$ son las estaciones del año $\}$ es finito.
El conjunto $\mathbf{N} = \{ x \mid x$ son números naturales $\}$ es infinito.

I.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Se llama *unión* de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A o de B, es decir: $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ ó $x \in B \}$. Gráficamente:

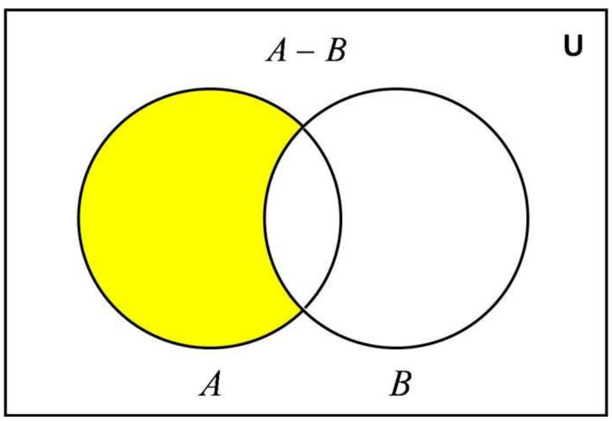


Se llama *intersección* de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A y de B, es decir: $A\bigcup B = \left\{ \, x \;\middle|\; x\in A \text{ y } x\in B \, \right\}$. Gráficamente:

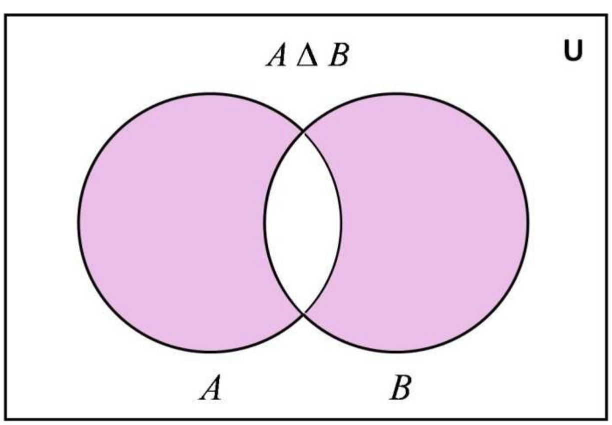


Cuando la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío, entonces se dice que son *ajenos* o *disjuntos*.

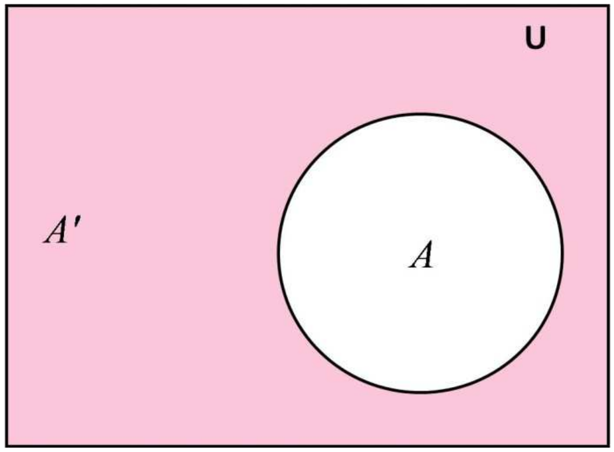
Dados dos conjuntos A y B, se llama *diferencia* al conjunto $A-B=\left\{ a\in A \;\middle|\; a\notin B \right\}$, es decir los elementos que sólo pertenecen a A. Gráficamente:



Asimismo, se llama *diferencia simétrica* entre A y B al conjunto $A\Delta B=(A-B)\bigcup(B-A)$, es decir los elementos que sólo pertenecen a A ó a B. Gráficamente:



Si $A \in U$, la diferencia $U - A$ se le llama *complemento* de A respecto de U, es decir, son todos los elementos del conjunto U excluyendo a los elementos del subconjunto A. Se denota como A'.



Si A y B son subconjuntos cualesquiera de U se verifica que:

$\phi' = U$

$U' = \phi$

$(A')' = A$

$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

$A - B = A \cap B'$

Ejemplo.

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Hallar:

a) $A \cup B$, b) $B \cup C$, c) $A \cap B$, d) $A \cap C$, e) $A - B$, f) $C - A$, g) $A \Delta B$, h) $B \Delta C$.

Solución.

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

b) $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

c) $A \cap B = \{2, 4\}$

d) $A \cap C = \{3, 4\}$

e) $A - B = \{1, 3\}$

f) $C - A = \{5, 6\}$

g) $A \Delta B = \{1, 3, 6, 8\}$

h) $B \Delta C = \{2, 3, 5, 8\}$

Ejemplo.

Sean los conjuntos: $U = \{x \mid x = 2n, \; 1 \le n \le 16, \; n \in \mathbf{N}\}$

$A = \{x \mid x = 6n, \; 1 \le n \le 5, \; n \in \mathbf{N}\}$

$B = \{x \mid x = 4n, \; 1 \le n \le 8, \; n \in \mathbf{N}\}$

Obtener:

a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $B - A$, d) $A \Delta B$, e) A', f) B'.

Solución.
Expresando los conjuntos por extensión:
$U=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32\}$

$A=\{6,12,18,24,30\}$

$B=\{4,8,12,16,20,24,28,32\}$

a) $A\cup B=\{4,6,8,12,16,18,20,24,28,30,32\}$

b) $A\cap B=\{12,24\}$

c) $B-A=\{4,8,16,20,28,32\}$

d) $A\Delta B=\{4,6,8,16,18,20,28,30,32\}$

e) $A'=\{2,4,8,10,14,16,20,22,26,28,32\}$

f) $B'=\{2,6,10,14,18,22,26,30\}$

I.3 PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS

Sean A, B y C tres conjuntos dentro del universo U. Las propiedades con las operaciones entre conjuntos son las siguientes:

1. Idempotencia
$A\cup A=A$
$A\cap A=A$
2. Conmutativa
$A\cup B=B\cup A$
$A\cap B=B\cap A$
3. Asociativa
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
4. Absorción
$A\cup(A\cap B)=A$
$A\cap(A\cup B)=A$
5. Distributiva
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
6. Complementariedad
$A\cup A'=U$
$A\cap A'=\phi$
7. Elemento Nulo
$A\cup\phi=A$
$A\cap\phi=\phi$
8. Elemento Universal
$A\cup U=U$
$A\cap U=A$
9. Leyes de D' Morgan
$(A\cup B)'=A'\cap B'$
$(A\cap B)'=A'\cup B'$

Ejemplo.
Dados los conjuntos
$U = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n \}$
$A = \{ a, d, f, g, m \}$
$B = \{ b, d, g, i, k, m, n \}$
Comprobar las leyes de D' Morgan.

Solución.
Primera ley:
$A \cup B = \{ a, b, d, f, g, i, k, m, n \}$
$(A \cup B)' = \{ c, e, h, j, l \} \quad \_(1)$
$A' = \{ b, c, e, h, i, j, k, l, n \}$
$B' = \{ a, c, e, f, h, j, l \}$
$A' \cap B' = \{ c, e, h, j, l \} \quad \_(2)$
Como $(1) = (2)$, se comprueba que $(A \cup B)' = A' \cap B'$
Segunda ley:
$A \cap B = \{ d, g, m \}$
$(A \cap B)' = \{ a, b, c, e, f, h, i, j, k, l, n \} \quad \_(3)$
$A' \cup B' = \{ a, b, c, e, f, h, i, j, k, l, n \} \quad \_(4)$
Como $(3) = (4)$, se comprueba que $(A \cap B)' = A' \cup B'$

I.4 CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO

La *cardinalidad* de un conjunto A es el número de elementos que posee. Se denota por $\eta(A)$

Ejemplo.
Dado el conjunto $A = \{ a, e, i, m, p \}$
Tiene cuatro elementos, así que su cardinalidad es $\eta(A) = 5$.

Dos conjuntos A y B son *equivalentes* si tienen la misma cardinalidad. Se denota como $A \approx B$

Ejemplo.
El conjunto P = $\{ x \mid x$ son los puntos cardinales $\}$, tiene $\eta(P) = 4$
y el conjunto E = $\{ x \mid x$ son las estaciones del año $\}$, tiene $\eta(E) = 4$
Al tener la misma cardinalidad, son equivalentes: $P \approx E$.

La cardinalidad de la unión de dos conjuntos A y B está dada por: $\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B)$

Ejemplo.
Sean $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$ dos conjuntos. Obtener la cardinalidad de su unión.

Solución.
$\eta(A) = 4$
$\eta(B) = 5$
$A \cap B = \{ 2, 4 \}$

$\eta(A \cap B) = 2$

$\therefore \quad \eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B) = 4 + 5 - 2 = 7$

Comprobando:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$

$\eta(A \cup B) = 7$

Ejemplo.

Un alumno de Área II de la Prepa 8 estudió Física y Biología cada día durante todo el mes de abril para preparar sus exámenes finales. Si estudió 23 días Física y 17 Biología, ¿cuántos días estudió:

a) Física y Biología?

b) Física pero no Biología?

c) Biología pero no Física?

Solución.

Días que estudió Física: $\eta(F) = 23$

Días que estudió Biología: $\eta(B) = 17$

Días totales que estudió en abril: $\eta(F \cup B) = 30$

a) Se sabe que $\eta(F \cup B) = \eta(F) + \eta(B) - \eta(F \cap B)$, así que despejando $\eta(F \cap B)$ se tiene:

$\eta(F \cap B) = \eta(F) + \eta(B) - \eta(F \cup)B = 23 + 17 - 30 = 10$. Estudió 10 días Física y Biología.

b) Como estudió 23 días Física y 10 ambas, entonces, $\eta(F - B) = 23 - 10 = 13$. Estudió 13 días sólo Física.

c) Como estudió 17 días Física y 10 ambas, entonces, $\eta(B - F) = 17 - 10 = 7$. Estudió 7 días sólo Biología.

Ejemplo.

En una encuesta sobre refrescos de cola, se obtuvo la siguiente información:

67% toman Coca o Pepsi y 13% toman ambas.

59% beben Pepsi o Big Cola y 11 beben ambas.

75% toman Coca o Big Cola y 15% toman ambas.

16% no beben ninguna de las tres.

Determinar:

a) El porcentaje que toma Big Cola.

b) El porcentaje que toman las tres marcas.

Solución.

Porcentaje de encuestados que beben Coca: $\eta(C)$

Porcentaje de encuestados que beben Pepsi: $\eta(P)$

Porcentaje de encuestados que beben Big Cola: $\eta(B)$

$\eta(C \cup P \cup B) = \eta(C) + \eta(P) + \eta(B) - \eta(C \cap P) - \eta(C \cap B) - \eta(P \cap B) + \eta(C \cap P \cap B)$

$100 - 16 = \eta(C) + \eta(P) + \eta(B) - 13 - 15 - 11 + \eta(C \cap P \cap B)$

$\Rightarrow \quad \eta(C) + \eta(P) + \eta(B) + \eta(C \cap P \cap B) = 123 \quad \_(1)$

Además, se sabe que:

$\eta(C \cup P) = \eta(C) + \eta(P) - \eta(C \cap P)$

$67 = \eta(C) + \eta(P) - 13$

$\Rightarrow \quad \eta(C) + \eta(P) = 80 \quad \_(2)$

$\eta(P \cup B) = \eta(P) + \eta(B) - \eta(P \cap B)$

$59=\eta(P)+\eta(B)-11$

$\Rightarrow \quad \eta(P)+\eta(B)=70 \quad \_(3)$

$\eta(C\cup B)=\eta(C)+\eta(B)-\eta(C\cap B)$

$75=\eta(C)+\eta(B)-15$

$\Rightarrow \quad \eta(C)+\eta(B)=90 \quad \_(4)$

De (4): $\eta(B)=90-\eta(C) \quad \_(5)$

Sustituyendo (5) en (3) se tiene:

$\eta(P)+90-\eta(C)=70 \quad \Rightarrow \quad \eta(P)=\eta(C)-20 \quad \_(6)$

Sustituyendo (6) en (2) se tiene: $\eta(C)+\eta(C)-20=80 \quad \Rightarrow \quad 2\eta(C)=100 \quad \Rightarrow \quad \eta(C)=\frac{100}{2}=50$

Sustituyendo en (6): $\eta(P)=50-20=30$

Sustituyendo en (5): $\eta(B)=90-50=40$

a) El 40% de los encuestados toma Big Cola

b) De (1): $\eta(C\cap P\cap B)=123-\eta(C)-\eta(P)-\eta(B)=123-50-30-40=3$, esto significa que el 3% de los encuestados toman las tres marcas.

Ejemplo.

Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por ciertos medios de transporte (bicicleta, motocicleta y automóvil). Los datos de la encuesta fueron los siguientes:

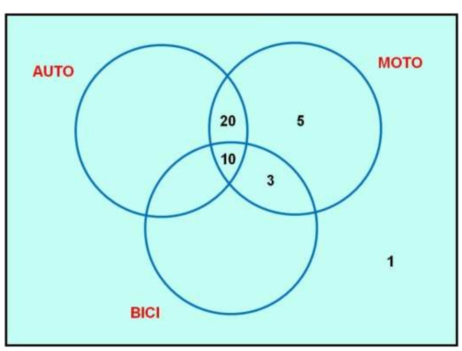
1) Motocicleta solamente: 5
2) Motocicleta: 38
3) No gustan del automóvil: 9
4) Motocicleta y bicicleta, pero no automóvil:3
5) Motocicleta y automóvil pero no bicicleta: 20
6) No gustan de la bicicleta: 72
7) Ninguna de las tres cosas: 1
8) No gustan de la motocicleta: 61

Determinar:

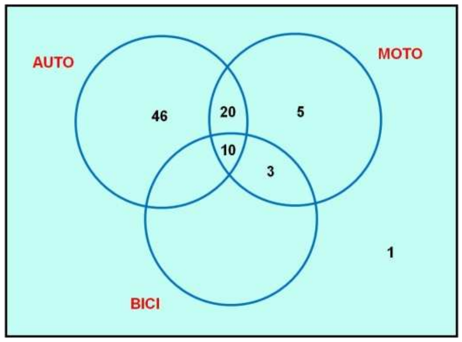
a) ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?
b) ¿A cuántos le gustaba la bicicleta solamente?
c) ¿A cuántos le gustaba el automóvil solamente?
d) ¿A cuántos le gustaban las tres cosas?
e) ¿A cuántos le gustaba la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta?

Solución.

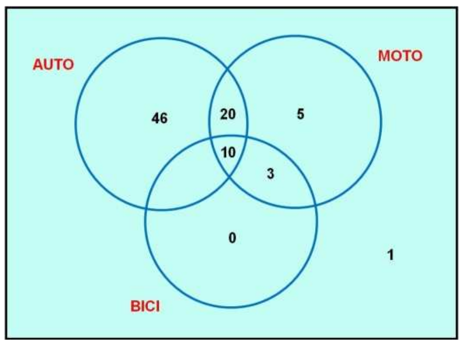
Ubicando los datos 1), 4), 5) y 7) en un diagrama de Venn para tres conjuntos y considerando el dato 2) se puede completar la única zona que falta en el conjunto MOTO, haciendo la diferencia $38-(20+5+3)=10$:



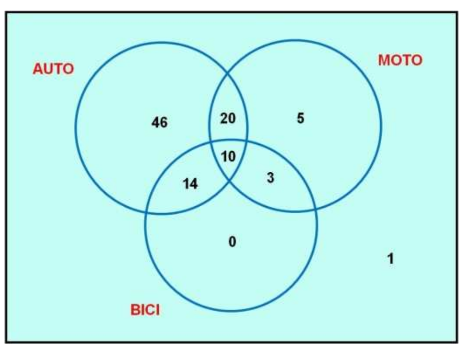
Utilizando el dato 6), las cuatro correspondientes al conjunto BICI, deberán sumar 72, por lo que $72-(20+5+1)=46$:



Utilizando el dato 3) y considerando todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto AUTO, deberán sumar 9, así que $9-(5+3+1)=0$.



Por último, se utiliza el dato 8) al considerar todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto MOTO, deberán sumar 61, entonces $61-(46+0+1)=14$:



Por lo tanto, las respuestas son:
a) Se entrevistaron a 99 jóvenes.
b) A ninguno le gustaba sólo la bicicleta.
c) A 46 les gustaba sólo el automóvil.
d) A 10 les gustaban las tres cosas.
e) A 14 les gustaba la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta.