PROBABILIDAD

UNIDAD III

I.1 EXPERIMENTOS, ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS

Un *experimento* es cualquier situación u operación en la cual se pueden presentar uno o varios resultados de un conjunto bien definido de posibles resultados.

Los experimentos, si se repiten bajo idénticas condiciones, pueden ser de dos tipos:

1. *Determinístico*. Se obtienen siempre los mismos resultados.

Ejemplo.
Medir con la misma regla e idénticas condiciones la longitud de una mesa

2. *Aleatorio*. No se obtienen siempre los mismos resultados.

Ejemplo.
El lanzamiento de una moneda observando la sucesión de caras y cruces que se presentan

Las siguientes son características de un experimento aleatorio:

- El experimento se puede repetir indefinidamente bajo idénticas condiciones.
- Cualquier modificación a las condiciones iniciales de la repetición puede modificar el resultado.
- Se puede determinar el conjunto de posibles resultados pero no predecir un resultado particular.
- Si el experimento se repite gran número de veces entonces aparece algún modelo de regularidad estadística en los resultados obtenidos.

Una *muestra estadística* es un subconjunto de casos o individuos de una población estadística. La muestra se toma para obtener un conocimiento de la población pero nunca proporciona información exacta, sino que incluye un cierto nivel de incertidumbre

Se llama *espacio muestral* E asociado a un experimento aleatorio, el conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento.

Ejemplo.
Al lanzar una moneda, el espacio muestral es $E=\{águila, sol\}$.

Ejemplo.
Al lanzar un dado de seis caras, el espacio muestral es $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Se llama *evento* o *suceso* a todo subconjunto de un espacio muestral.

Ejemplo.
Se hace un experimento en que se lanza de un dado y se quiere conocer ¿cuál es la probabilidad de que caiga un tres o un cinco?

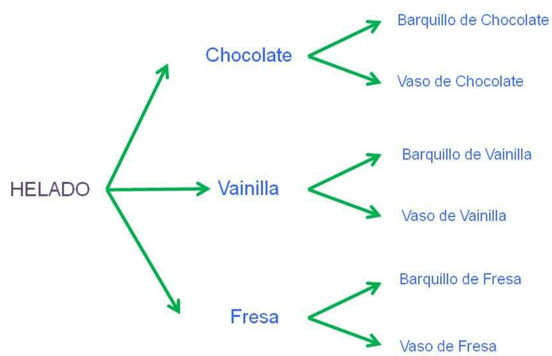
Solución.
Si E contiene la totalidad de los resultados posibles, entonces $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ puesto que el dado tiene seis caras y si se busca la probabilidad P de que caiga tres o cinco, esto constituye un evento entonces, $A=\{3,5\}$.

Ejemplo.
En el espacio muestral $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ del lanzamiento de un dado los siguientes son eventos:
1. Un número primo: $A=\{1,2,3,5\}$.
2. Un número primo par: $B=\{2\}$.
3. Un número mayor o igual a cinco: $C=\{5,6\}$.

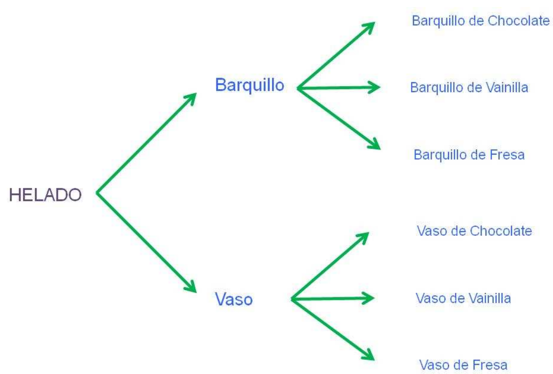
I.2 PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE CONTEO, DIAGRAMAS DE ÁRBOL Y LISTAS

El principio fundamental de conteo se utiliza para determinar los posibles resultados cuando hay dos o más características que pueden variar.

Ejemplo.
Un helado puede venir en un cono o un barquillo y los sabores son chocolate, fresa y vainilla:



El diagrama anterior se llama *diagrama de árbol* y muestra todas las posibilidades. El diagrama de árbol también se puede ordenar de otra forma. Ambos diagramas tienen un total de 6 resultados.



Para determinar la cantidad total de resultados, multiplica la cantidad de posibilidades de la primera característica por la cantidad de posibilidades de la segunda característica. En el ejemplo anterior, multiplica 3 por 2 para obtener 6 posibles resultados.

Si hay más de dos resultados, continúa multiplicando las posibilidades para determinar el total de resultados.

En general, si un evento puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si se continúa con el procedimiento de n_2 maneras distintas, y si después de efectuados estos, se puede proceder de n_3 maneras diferentes y así sucesivamente, entonces el número de formas o maneras en los que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_r$.

El número total n_T de formas o maneras en que puede realizarse un evento es:

$$n_T = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_r$$

El diagrama de árbol se usa para numerar los resultados de un experimento y tiene los siguientes elementos:

- Nodo inicial. Puede o no representar un evento.
- Nodos finales o terminales. Son el número de alternativas.
- Ramas. Une a dos nodos.

La *probabilidad* mide el elemento de aleatoriedad que se encuentra asociado a la ocurrencia de determinados eventos. El objetivo aquí es contar los distintos arreglos de los puntos en un espacio muestral sin que se tenga que anotar cada uno de ellos.

Por ejemplo, cuando se lanza una moneda, solamente puede caer águila o sol, no hay más opciones en esa moneda, por lo tanto es fácil. Sin embargo, cuando se trata de contar las posibilidades de varias opciones se puede complicar mucho.

Ejemplo.
Si en una cocina económica se ofrecen tres tipos de sopas: arroz, fideos y consomé; se ofrecen cuatro tipos de guisado: pollo, huevos, carne y atún; y se ofrecen dos postres: fruta o gelatina. Se desea conocer ¿cuántas posibilidades se tienen para hacer un menú?

Solución.
Se puede empezar haciendo una lista con todos los casos:
Arroz, pollo y fruta
Arroz, pollo y gelatina
Arroz, huevos y fruta
Arroz, huevos y gelatina
Etc.
Sin embargo, si se aplica el principio fundamental de conteo se llega a:
Sopas: $n_1 = 4$, guisados: $n_2 = 3$, postres: $n_3 = 2$
Por lo tanto, $n_T = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ tipos de menú distintos.

Cuando hay muchas posibilidades no es fácil hacer el conteo para todas esas variaciones y más si se hace una por una. Por ello existen técnicas que sin duda facilitan notablemente los conteos de todas las posibilidades existentes.

Una *lista* es una sucesión ordenada de objetos, se escriben entre paréntesis y separando los elementos por comas. Por ejemplo la lista $(1, 3, \mathbf{Z})$ es una lista cuyo primer elemento es el 1, el segundo el 3 y el tercer elemento es el conjunto de los números enteros.

El orden en que aparecen los elementos en una lista es muy importante, así la lista $(2, 4, 6)$ es diferente de la lista $(6, 4, 2)$ y de la lista $(4, 2, 6)$ sin importar que los elementos sean los mismos.

Los elementos en una lista pueden repetirse como en $(2, 2, 3)$.

La longitud de una lista es la cantidad de elementos que tiene la lista, así en todos los ejemplos anteriores la longitud es de tres, mientras que la lista $(2,4,6,8)$ tiene una longitud de cuatro.

Una lista de longitud dos tiene el nombre especial de *par ordenado*.

Ejemplo.
Se desea hacer una lista de dos elementos, en los lugares de la lista pueden estar cualquiera de los dígitos 2, 4, 6 o 8. ¿Cuántas listas con estas características son posibles? La forma más directa de responder es escribiendo todas las posibilidades:

$(2,2)$	$(2,4)$	$(2,6)$	$(2,8)$
$(4,2)$	$(4,4)$	$(4,6)$	$(4,8)$
$(6,2)$	$(6,4)$	$(6,6)$	$(6,8)$
$(8,2)$	$(8,4)$	$(8,6)$	$(8,8)$

Solución.
Organizando las listas de manera conveniente para que no se repita ningún par ni se olvide ninguno. Al haber cuatro filas y cuatro columnas, hay 16 listas posibles.

Para listas de dos elementos en las que hay n opciones para la primera posición, y cada opción del primer elemento tiene m opciones para el segundo elemento. Entonces la cantidad de estas listas es de nm.

Este principio se puede aplicar a listas más largas. Por ejemplo, en las listas de tres elementos supóngase que hay a opciones para el primer elemento, para cada uno de estos hay b opciones para el segundo elemento y para cada opción del par formado por el primer y segundo elemento hay c opciones para el tercer elemento. De esta forma hay en total abc listas posibles.

I.3 ANÁLISIS COMBINATORIO

El *análisis combinatorio* es la rama de las matemáticas que estudia de cuántas formas se pueden agrupar los objetos tomados de un conjunto dado.

Las características más importantes por conocer de de estas agrupaciones son:

- El número de elementos que contienen.
- La presencia o no de elementos repetidos.
- El orden que ocupan los elementos.

Aunque los principios básicos de conteo pueden usarse en la gran mayoría de los casos, hay conceptos dentro del análisis combinatorio que permiten conocer de forma exacta las características de las agrupaciones a través de expresiones que permitan efectuar los cálculos de manera más rápida.

1.3.1 FACTORIAL DE UN NÚMERO Y PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

El *factorial* de un número natural n se define como el producto de los n primeros números naturales. Se denota por escribe $n!$, y se lee "n factorial".

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$$

Por definición el factorial de cero es uno, esto es: $0! \equiv 1$.

Ejemplos.
$3! = 3(2)(1) = 6$
$5! = 5(4)(3)(2)(1) = 120$
$7! = 7(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 5{,}040$

Se denomina *permutaciones sin repetición* a las posibles agrupaciones que se pueden establecer con todos los elementos de un grupo. Es decir, son todos los arreglos de elementos en donde interesa el lugar o posición que ocupa cada uno de los elementos que constituyen dicha agrupación.

Ejemplo
Calcular las posibles formas en que se pueden ordenar los números $1, 2, 3$.
Solución.
Hay 6 posibles agrupaciones: $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$

Si la expresión P_n representa las permutaciones de n elementos tomando todos los elementos, entonces el número de permutaciones está dado por:

$$P_n = n!$$

Los subgrupos se diferenciaran únicamente por el orden de los elementos.

En el ejemplo anterior se pudo aplicar que: $P_3 = 3! = 6$.

Ejemplo.
¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de la palabra TROLEBUS?

Solución.
La palabra TROLEBUS tiene ocho letras: $P_8 = 8! = 40{,}320$

Ejemplo.
¿Cuántas comenzarán con T y terminarán con S?

Solución.
Si se fijan la T y la S: T_ _ _ _ _ _ S, entonces se tienen seis espacios disponibles: $P_6 = 6! = 720$

Ejemplo.
¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: $1, 2, 3, 4, 5$?

Solución.
Los números buscados deben tener diferentes cifras. $P_5 = 5! = 120$ números.

Ejemplo.
¿De cuántas formas distintas pueden sentarse siete personas en una fila de butacas?

Solución.
Todas las personas deben sentarse en orden, así que: $P_7 = 7! = 5{,}040$ formas.

1.3.2 PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Las *permutaciones con repetición* son permutaciones de n elementos, en los que uno de ellos se repite x_1 veces, otro x_2 veces y así sucesivamente hasta uno que se repite x_k veces. Se denotan por medio de $PR_n^{x_1, x_2, \cdots, x_k}$ y se calculan por medio de:

$$PR_n^{x_1, x_2, \cdots, x_k} = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \cdots x_k!}$$

Es importante notar lo siguiente:

- Para formar un grupo se toman todos los elementos, no hay que seleccionar unos pocos.
- Hay que tener en cuenta el orden en que se colocan los elementos. Si se altera el orden, se tiene un grupo distinto.
- Hay repetición de los elementos dentro de un mismo grupo

Ejemplo.
Calcular las permutaciones de cinco elementos, en los que uno de ellos se repite en dos ocasiones y otro se repite en tres ocasiones.

Solución.
$n = 5,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$

$PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ formas diferentes.

Ejemplo.
¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse en línea nueve bolas de las que cuatro son blancas, tres amarillas y dos azules?

Solución.
$n = 10,\ x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2$

$PR_{10}^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 1{,}260$ modos de colocarlas.

Ejemplo.
¿Cuántos números de seis cifras se pueden formar con los dígitos $1, 1, 1, 2, 2, 1$?

Solución.
$n = 6,\ x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$

$PR_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 70$ números.

Ejemplo.
¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de la palabra MATEMATICAS?

Solución.
Se tienen once objetos (letras) por colocar. Uno que repite tres veces (A), dos que se repiten dos veces (M y T) y cuatro que se aparecen sólo una vez (E, I, C y S).
Esto es: $n = 11,\ x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1,\ x_7 = 1$

$$PR_{11}^{3,2,2,1,1,1,1} = \frac{11!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 1'663{,}200$$ palabras.

1.3.3 VARIACIONES SIN REPETICIÓN

Una forma provechosa de imaginar problemas de conteo de listas es hacer un diagrama con cuadros. Cada cuadro representa una posición en la lista. Se escribe la cantidad de elementos posibles en cada cuadro. El total de listas posibles se calcula multiplicando entre sí esas cantidades.

Ejemplo.
Hay un club con 15 socios. Se desea elegir una mesa directiva formada por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas maneras se puede hacer la elección, suponiendo que un socio puede ocupar sólo un cargo?

Solución.
Se traza el siguiente diagrama:

15	14	13	12

Esto muestra que hay 15 socios para elegir el presidente. Una vez seleccionado el presidente quedan 14 socios para ser elegidos como vicepresidente y en consecuencia hay $15(14)$ formas de elegir al presidente y al vicepresidente. Una vez elegidos, hay 13 formas de elegir al tercer elemento (el secretario). Una vez elegidos los tres primeros cargos quedarán 12 socios para elegir entre estos al tesorero. En consecuencia hay $15(14)(13)(12) = 32{,}760$ formas de seleccionar la mesa directiva.

Este tipo de ordenación, recibe el nombre de *variación* y hay dos tipos: con repetición y sin repetición.

Variaciones sin repetición de n elementos tomados m cada vez $(m < n)$ son los distintos grupos o listas que se pueden formar con los n elementos, de manera que: en cada grupo entren m elementos, distintos y que los grupos son distintos si se diferencien en algún elemento o en el orden de colocación de éstos. Se representa por V_m^n.
Nótese que:

V_0^n no tiene sentido

$V_1^n = n$

$V_2^n = n(n-1)(n-2)$

$V_3^n = n(n-1)(n-2)(n-3)$

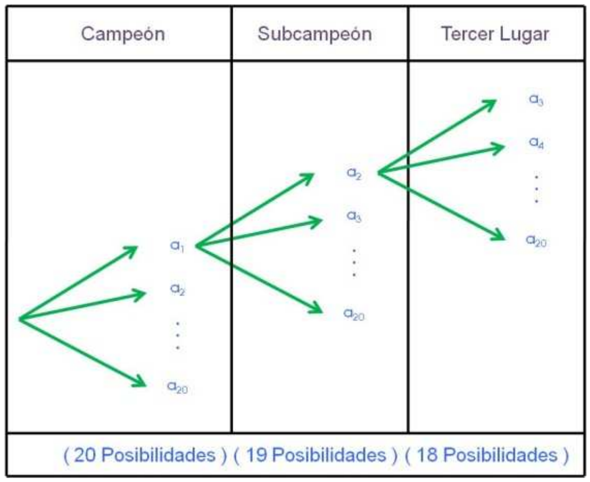
y en general:

$$V_m^n = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

Ejemplo.
En una carrera de atletismo participan veinte corredores. Teniendo en cuenta que no es posible llegar al mismo tiempo, ¿de cuantas maneras podrán llegar a la meta los tres primeros?

Solución.
Se elige una notación adecuada, por ejemplo $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{20}$, para representar a los 20 corredores.
Para la primera posición (campeón) hay 20 posibilidades; para la segunda posición (subcampeón) hay 19 posibilidades, y para el tercer puesto hay 18 posibilidades.

A estos distintos grupos ordenados de tres corredores, elegidos de entre los 20 que se tienen, se le llama variaciones de 20 elementos tomando de a tres cada vez, es decir: V_3^{20}, donde $n-m+1=18$. Construyendo el diagrama de árbol, se concluye que hay $20(19)(18)=6,840$ formas distintas de quedar los tres primeros clasificados.



Ejemplo.
¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sin que se repita ninguna cifra?

Solución.
Como el número 123 es diferente del número 321, luego influye el orden y además no se puede repetir ninguna cifra. Por lo tanto, se debe calcular el número de variaciones de nueve elementos $(n=9)$ tomando tres cada vez $(m=3)$, donde $n-m+1=7$:

$V_3^9 = 9(8)(7)=504$ números distintos.

Ejemplo.
Se quiere cambiar la bandera de una ciudad de tal forma que esté formada por tres franjas horizontales de igual ancho y distinto color. ¿Cuántas banderas distintas se podrán formar con los siete colores del arco iris?

Solución.
Como influye el orden en que se establezcan los colores y además no se puede repetir ningún color, se tiene que calcular el número de variaciones ordinarias de siete elementos $(n=7)$ tomando tres cada vez $(m=3)$, donde $n-m+1=7$:

$V_3^7 = 7(6)(5)=210$ banderas distintas.

Ejemplo.
¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar doce alumnos en los cuatro asientos de la primera fila de la clase? ¿Y si el primer asiento está siempre reservado para el más aplicado?

Solución.
Para el primer caso, se calcula el número de variaciones de doce elementos $(n=12)$ tomados de a cuatro cada vez $(m=4)$, donde $n-m+1=9$:

$V_4^{12} = 12(11)(10)(9)=11,880$ formas distintas.

En el segundo caso, como hay un estudiante menos $(n = 11)$ en el juego de posibilidades (el más aplicado siempre va a estar en el primer asiento) y un asiento menos $(m = 3)$, donde $n - m + 1 = 9$:
$V_3^{11} = 11(10)(9) = 990$ formas distintas.

1.3.4 VARIACIONES CON REPETICIÓN

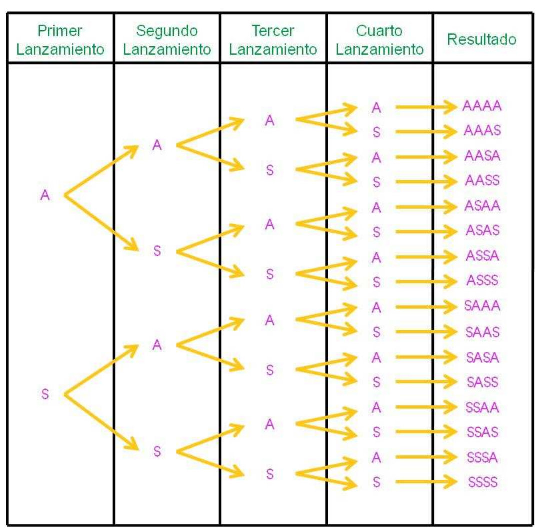
Variaciones con repetición de n elementos tomados m cada vez $(m < n)$ son los distintos grupos o listas que se pueden formar con los n elementos, de manera que en cada grupo entren m elementos, repetidos o no y dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de éstos. Se representa por VR_m^n.

En general, el número de variaciones con repetición que se pueden formar con n elementos tomados de a m cada vez, está dado por:

$$VR_m^n = n^m$$

Ejemplo.
¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener si se lanza cuatro veces consecutivas una moneda?

Solución.
Las distintas ordenaciones que se obtienen son las variaciones con repetición de dos elementos tomados de a cuatro cada vez. Esto es: $VR_4^2 = 2^4 = 16$ formas distintas.
Construyendo el diagrama de árbol para comprobarlo, se tiene:



Nótese como sigue influyendo el orden, como en el caso anterior, pero además los elementos se pueden repetir.

Ejemplo.
Se lanzan tres dados de distintos colores una vez. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?

Solución.
$VR_3^6 = 6^3 = 216$ resultados diferentes.

Ejemplo.
¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ si se pueden repetir las cifras?

Solución.
Se tiene que hallar el número de variaciones con repetición de 10 elementos tomados de tres, es decir: $VR_3^{10} = 10^3 = 1{,}000$.

Ahora bien, de estos $1{,}000$ números habrá muchos que inicien con cero como por ejemplo $026, 094, 002$, etc., por lo cual no se pueden considerar de tres cifras. Por esto, se deben descontar $VR_2^{10} = 10^2 = 100$ números. Así, el número de variaciones es: $VR_3^{10} - VR_2^{10} = 1{,}000 - 100 = 900$.

Ejemplo.
En el alfabeto Morse se utilizan los símbolos: el punto y la raya de acuerdo con la siguiente tabla:

Letra	Código	Letra	Código	Letra	Código	Número	Código
A	. -	K	- . -	U	. . -	0	- - - - -
B	- . . .	L	. - . .	V	. . . -	1	. - - - -
C	- . - .	M	- -	W	. - -	2	. . - - -
D	- . .	N	- .	X	- . . -	3	. . . - -
E	.	O	- - -	Y	- . - -	4	. . . . -
F	. . - .	P	. - - .	Z	- - . .	5	. . . . .
G	- - .	Q	- - . -			6	- . . . .
H	. . . .	R	. - .			7	- - . . .
I	. .	S	. . .			8	- - - . .
J	. - - -	T	-			9	- - - - .

¿Cuántos caracteres diferentes es posible obtener tomando uno, dos, tres o cuatro de los símbolos citados?

Solución.
Caracteres formados por un sólo símbolo: $VR_1^2 = 2^1 = 2$

Caracteres formados por dos símbolos: $VR_2^2 = 2^2 = 4$

Caracteres formados por tres símbolos: $VR_3^2 = 2^3 = 8$

Caracteres formados por cuatro símbolos: $VR_4^2 = 2^4 = 16$

Total de caracteres diferentes usando cuatro o menos símbolos: $S = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$
Nótese como estos 30 caracteres alcanzan a cubrir sólo las letras. Esa es la razón por la que los números y los signos menos usados requieren de cinco símbolos.

Ejemplo.
Resolver la ecuación: $VR_2^x - 5 \cdot VR_2^{x-2} = 244$

Solución.
Como $VR_2^x = x^2$ y $VR_2^{x-2} = (x-2)^2$, se tiene:

$$x^2 + 5(x-2)^2 = 244 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 5x^2 - 20x + 20 = 244 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - 20x - 224 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado donde $a = 6, b = -20, c = -224$:

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{20^2 - 4(6)(-224)}}{2(6)} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 5{,}376}}{12} = \frac{20 \pm \sqrt{5{,}776}}{12} = \frac{20 \pm 76}{12}$$

$$x_1 = \frac{20+76}{12} = \frac{96}{12} = 8 , \quad x_2 = \frac{20-76}{12} = \frac{-56}{12} = -\frac{14}{3}$$

Por lo tanto, la solución es $x = 8$, ya que la otra al ser fracción, carece de sentido.

1.3.5 COMBINACIONES SIN REPETICIÓN

Las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de m en m se definen como las distintas agrupaciones formadas con m elementos distintos, eligiéndolos de entre los n elementos de que se dispone, considerando una variación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento.

No influye el orden de colocación de sus elementos. Se denotan por medio de C_m^n o también por bien por $\binom{n}{m}$. El número de combinaciones que se pueden construir está dado por:

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \qquad n > m$$

Ejemplo.
Expresar todas las combinaciones sin repetición posibles del conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

Solución.
a) De un elemento: Si se tiene un conjunto de cuatro elementos y se quiere hacer grupos de uno, únicamente se pueden hacer cuatro grupos: a, b, c, d.
b) De dos elementos. A diferencia de las variaciones, si ahora se cambia de orden los elementos de un grupo, se obtiene el mismo grupo, por lo que para añadir el segundo elemento sólo se puede añadir todos los elementos posteriores y no los anteriores. Así se obtienen: ab, ac, ad, bc, bd, cd.
c) De tres elementos. Se pueden construir a partir de las anteriores añadiendo a cada combinación de orden dos los elementos posteriores al segundo. Se obtienen: abc, abd, acd, bcd.
d) De cuatro elementos. Se pueden obtener a partir de las de orden tres, añadiendo a cada una de ellas los elementos posteriores al tercer elemento. Se obtiene: $abcd$.

Como se están construyendo combinaciones sin repetición y los elementos no se pueden repetir, ya no se puede continuar construyendo variaciones de orden cinco.

Aplicando la expresión para los cuatro casos, se tiene:

Combinaciones de un elemento: $C_1^4 = \binom{4}{1} = \frac{4!}{(4-1)!\,1!} = \frac{24}{(6)1} = 4$

Combinaciones de dos elementos: $C_2^4 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{24}{(2)2} = 6$

Combinaciones de tres elementos: $C_3^4 = \binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{24}{(1)6} = 4$

Combinaciones de cuatro elementos: $C_4^4 = \binom{4}{4} = \frac{4!}{(4-4)!\,4!} = \frac{24}{(1)24} = 1$

Valores que coinciden con los resultados obtenidos.

Ejemplo
¿De cuántas formas se puede dar el mismo premio a dos ganadores de un concurso en que hay cinco concursantes?

Solución.
Como el premio es el mismo para ambos, entonces las formas de realizar la elección son las combinaciones de cinco elementos tomados de dos en dos. Esto es:

$$C_2^5=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\frac{5!}{(5-2)!\,2!}=\frac{120}{(6)2}=10 \text{ formas.}$$

Ejemplo.
Cuantos grupos de cinco alumnos pueden formarse con los treinta alumnos de una clase. (Un grupo es distinto de otro si se diferencia de otro por lo menos en un alumno).

Solución.
Como no pueden repetirse los alumnos, entonces se pueden formar:

$$C_5^{30}=\begin{pmatrix}5\\30\end{pmatrix}=\frac{30!}{(30-5)!\,5!}=142{,}506 \text{ grupos distintos.}$$

Ejemplo.
Una señora desea invitar a cenar a cinco de once amigos que tiene. ¿Cuántas maneras tiene de invitarlos?

Solución.

$$C_5^{11}=\begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix}=\frac{11!}{(11-5)!\,5!}=462 \text{ maneras de invitarlos.}$$

Ejemplo.
Para aprobar un examen un alumno debe contestar doce de veinte preguntas. a) ¿Cuántas maneras tiene el alumno de aprobar?, b) ¿Cuántas maneras tiene si sabe la respuesta de las dos primeras preguntas?, c) ¿Cuántas maneras tiene si está seguro de una de las tres primeras preguntas?, d) ¿Cuántas maneras tiene si debe contestar como máximo una de las tres primeras preguntas?
Solución.

a) $C_{12}^{20}=\begin{pmatrix}12\\20\end{pmatrix}=\frac{20!}{(20-12)!\,12!}=125{,}970$ maneras.

b) $C_2^2\cdot C_{10}^{18}=\left[\frac{2!}{(2-2)!\,2!}\right]\left[\frac{18!}{(18-10)!\,10!}\right]=1(43{,}758)=43{,}758$ maneras.

c) $C_1^3\cdot C_{11}^{17}=\left[\frac{3!}{(3-1)!\,1!}\right]\left[\frac{17!}{(17-11)!\,11!}\right]=1(12{,}376)=12{,}376$ maneras.

d) En este caso debe contestar correctamente cero o una de las tres primeras preguntas, esto es:

$$C_0^3\cdot C_{12}^{12}+C_1^3\cdot C_{11}^{17}=\left[\frac{3!}{(3-0)!\,0!}\right]\left[\frac{12!}{(12-12)!\,12!}\right]+\left[\frac{3!}{(3-1)!\,1!}\right]\left[\frac{17!}{(17-11)!\,11!}\right]=1(1)+3(12{,}376)$$

$=37{,}129$ formas.

1.3.6 COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Las combinaciones con repetición de n elementos tomados de p en p se definen como las distintas agrupaciones formadas con p elementos que pueden repetirse, eligiéndolos de entre los n elementos de que se dispone, considerando una variación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento.

No influye el orden de colocación de sus elementos. El número de combinaciones que se pueden construir se puede calcular mediante la fórmula:

$$CR_m^n = \binom{n+m-1}{p}$$

Ejemplo.
Expresar todas las combinaciones con repetición posibles del conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

Solución.
a) De un elemento. Si se tiene un conjunto de cuatro elementos y si se quiere hacer grupos de uno, únicamente se pueden hacer cuatro grupos: a, b, c, d .

b) De dos elementos. La forma de construirlas será similar a las combinaciones sin repetición aunque con la diferencia de que al permitirse repetir los elementos se tiene que añadir a cada una de las de orden uno, el mismo elemento y todos los siguientes. Así se obtienen 10 grupos:
$aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd$.

c) De tres elementos. Se pueden construir a partir de las anteriores añadiendo a cada combinación de orden dos el último elemento y todos los elementos siguientes. Se obtienen 20 grupos:
$aaa, aab, aac, aad, abb, abc, abd, acc, acd, add, bbb, bbc, bbd, bcc, bcd, bdd, ccc, ccd, cdd, ddd$

d) De cuatro elementos. Se pueden obtener a partir de las de orden tres, añadiendo a cada una de ellas el último elemento y los elementos siguientes. Se obtienen 35 grupos:
$aaaa, aaab, aaac, aaad, aabb, aabc, aabd, aacc, aacd, aadd, abbb, abbc, abbd, abcc, abcd, abdd,$
$accc, accd, acdd, addd, bbbb, bbbc, bbbd, bbcc, bbcd, bbdd, bccc, bccd, bcdd, bddd, cccc, cccd,$
$ccdd, cddd, dddd$

e) De cinco o más elementos. Como se están construyendo combinaciones con repetición y los elementos se pueden repetir, se puede continuar construyendo combinaciones de orden cinco o más elementos.

Aplicando la expresión para los primeros cuatro casos, se comprueban los resultados obtenidos:

Combinaciones de un elemento: $CR_1^4 = \binom{4+1-1}{1} = \binom{4}{1} = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{24}{(6)1} = 4$

Combinaciones de dos elementos: $CR_2^4 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{120}{(6)2} = 10$

Combinaciones de tres elementos: $CR_3^4 = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{720}{(6)6} = 20$

Combinaciones de cuatro elementos: $CR_4^4 = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!4!} = \frac{5{,}040}{(6)24} = 35$

Ejemplo.
¿Cuántas fichas tiene el juego de dominó?

Solución.
Una ficha de dominó es un rectángulo en el que hay dos partes, en cada una de ellas hay una serie de puntos que indican la puntuación de esa parte. Estas puntuaciones van de blanca (0 puntos) a 6. Además, se tienen pares de puntuaciones de 0 a 6. Por lo que el total de fichas será:

$$CR_n^p = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)!2!} = 28$$

Ejemplo.
De cuántas formas se pueden colocar diez canicas rojas en 10 bolsas distintas.

Solución.
En este caso no importa el orden, ya que si se cambian los elementos de orden, se tendría el mismo número de canicas en cada bolsa. Además, puede haber repetición porque en una misma bolsa puede haber varias canicas.

$$CR_5^{10} = \binom{10+5-1}{10} = \binom{14}{10} = \frac{14!}{(14-10)!\,10!} = 1{,}001 \text{ formas.}$$

Ejemplo.
En el bufet de un restaurante hay seis tipos distintos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro pasteles? (Si a alguien le gusta mucho un pastel, lo puede pedir hasta cuatro veces).

Solución.
No importa el orden en que se elijan los pasteles y se puede repetir, así que:

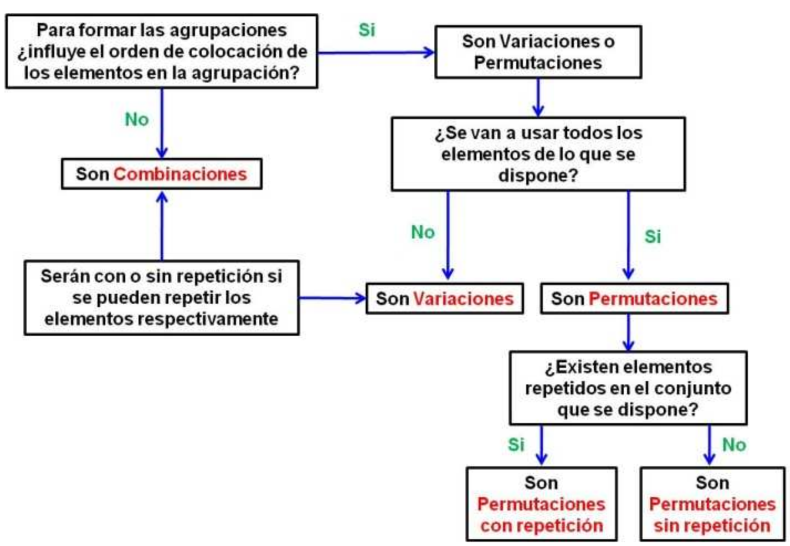
$$CR_4^{6} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{9} = \frac{9!}{(9-4)!\,4!} = 126 \text{ formas.}$$

Ejemplo.
En una bodega hay doce botellas de tequila, doce de brandy y doce de mezcal. Si un cliente compró ocho botellas en total. ¿Cuántas combinaciones puede llevarse?

Solución.

$$CR_3^{8} = \binom{8+3-1}{3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = 120$$

El siguiente diagrama ayuda para identificar en un problema, si se trata de variaciones, permutaciones o combinaciones, y si son con o sin repetición:



Ejemplo.

Dados los elementos: $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ obtener y mostrar cada caso:

a) P_4

b) V_1^4, V_2^4, V_3^4, V_4^4

c) C_1^4, C_2^4, C_3^4, C_4^4

d) VR_1^4, VR_2^4

e) CR_1^4, CR_2^4, CR_3^4

Solución.

a) $P_4 = 4! = 24$

$\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $\{\alpha,\beta,\delta,\gamma\}$, $\{\alpha,\gamma,\beta,\delta\}$, $\{\alpha,\gamma,\delta,\beta\}$, $\{\alpha,\delta,\beta,\gamma\}$, $\{\alpha,\delta,\gamma,\beta\}$, $\{\beta,\alpha,\gamma,\delta\}$, $\{\beta,\alpha,\delta,\gamma\}$, $\{\beta,\gamma,\alpha,\delta\}$, $\{\beta,\gamma,\delta,\alpha\}$, $\{\beta,\delta,\alpha,\gamma\}$, $\{\beta,\delta,\gamma,\alpha\}$, $\{\gamma,\alpha,\beta,\delta\}$, $\{\gamma,\alpha,\delta,\beta\}$, $\{\gamma,\beta,\alpha,\delta\}$, $\{\gamma,\beta,\delta,\alpha\}$, $\{\gamma,\delta,\alpha,\beta\}$, $\{\gamma,\delta,\beta,\alpha\}$, $\{\delta,\alpha,\beta,\gamma\}$, $\{\delta,\alpha,\gamma,\beta\}$, $\{\delta,\beta,\alpha,\gamma\}$, $\{\delta,\beta,\gamma,\alpha\}$, $\{\delta,\gamma,\alpha,\beta\}$, $\{\delta,\gamma,\beta,\alpha\}$

b) $V_1^4 = \dfrac{4!}{(4-1)!} = \dfrac{24}{6} = 4$

$\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, $\{\delta\}$

$V_2^4 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{24}{2} = 12$

$\{\alpha,\beta\}$,$\{\alpha,\gamma\}$, $\{\alpha,\delta\}$, $\{\beta,\alpha\}$, $\{\beta,\gamma\}$, $\{\beta,\delta\}$, $\{\gamma,\alpha\}$,$\{\gamma,\beta\}$, $\{\gamma,\delta\}$, $\{\delta,\alpha\}$, $\{\delta,\beta\}$, $\{\delta,\gamma\}$

$V_3^4 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{24}{1} = 24$

$\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\{\alpha,\gamma,\beta\}$, $\{\alpha,\beta,\delta\}$, $\{\alpha,\delta,\beta\}$, $\{\alpha,\gamma,\delta\}$, $\{\alpha,\delta,\gamma\}$, $\{\beta,\alpha,\gamma\}$, $\{\beta,\gamma,\alpha\}$, $\{\beta,\alpha,\delta\}$, $\{\beta,\delta,\alpha\}$, $\{\beta,\gamma,\delta\}$, $\{\beta,\delta,\gamma\}$, $\{\gamma,\alpha,\beta\}$, $\{\gamma,\beta,\alpha\}$, $\{\gamma,\alpha,\delta\}$, $\{\gamma,\delta,\alpha\}$, $\{\gamma,\beta,\delta\}$, $\{\gamma,\delta,\beta\}$, $\{\delta,\alpha,\beta\}$, $\{\delta,\beta,\alpha\}$, $\{\delta,\alpha,\gamma\}$, $\{\delta,\gamma,\alpha\}$, $\{\delta,\beta,\gamma\}$, $\{\delta,\gamma,\beta\}$

$V_4^4 = \dfrac{4!}{(4-4)!} = \dfrac{24}{1} = 24$

$\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $\{\alpha,\beta,\delta,\gamma\}$, $\{\alpha,\gamma,\beta,\delta\}$, $\{\alpha,\gamma,\delta,\beta\}$, $\{\alpha,\delta,\beta,\gamma\}$, $\{\alpha,\delta,\gamma,\beta\}$, $\{\beta,\alpha,\gamma,\delta\}$, $\{\beta,\alpha,\delta,\gamma\}$, $\{\beta,\gamma,\alpha,\delta\}$, $\{\beta,\gamma,\delta,\alpha\}$, $\{\beta,\delta,\alpha,\gamma\}$, $\{\beta,\delta,\gamma,\alpha\}$, $\{\gamma,\alpha,\beta,\delta\}$, $\{\gamma,\alpha,\delta,\beta\}$, $\{\gamma,\beta,\alpha,\delta\}$, $\{\gamma,\beta,\delta,\alpha\}$, $\{\gamma,\delta,\alpha,\beta\}$, $\{\gamma,\delta,\beta,\alpha\}$, $\{\delta,\alpha,\beta,\gamma\}$, $\{\delta,\alpha,\gamma,\beta\}$, $\{\delta,\beta,\alpha,\gamma\}$, $\{\delta,\beta,\gamma,\alpha\}$, $\{\delta,\gamma,\alpha,\beta\}$, $\{\delta,\gamma,\beta,\alpha\}$

c) $C_1^4 = \dfrac{4!}{(4-1)!1!} = \dfrac{24}{6(1)} = 4$

$\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, $\{\delta\}$

$C_2^4 = \dfrac{4!}{(4-2)!2!} = \dfrac{24}{2(2)} = 6$

$\{\alpha,\beta\}$,$\{\alpha,\gamma\}$, $\{\alpha,\delta\}$, $\{\beta,\gamma\}$, $\{\beta,\delta\}$, $\{\gamma,\delta\}$

$C_3^4 = \dfrac{4!}{(4-3)!3!} = \dfrac{24}{1(6)} = 4$

$\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\{\alpha,\beta,\delta\}$, $\{\alpha,\gamma,\delta\}$, $\{\beta,\gamma,\delta\}$

$C_4^4 = \dfrac{4!}{(4-4)!4!} = \dfrac{24}{1(24)} = 1$

$\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$

d) $VR_1^4 = 4^1 = 4$

$\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}$

$VR_2^4 = 4^2 = 16$

$\{\alpha,\alpha\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\alpha,\delta\}, \{\beta,\beta\}, \{\beta,\alpha\}, \{\beta,\gamma\}, \{\beta,\delta\},$
$\{\gamma,\gamma\}, \{\gamma,\alpha\}, \{\gamma,\beta\}, \{\gamma,\delta\}, \{\delta,\delta\}, \{\delta,\alpha\}, \{\delta,\beta\}, \{\delta,\gamma\}$

e) $CR_1^4 = \frac{(4+1-1)!}{(4-1)!1!} = \frac{24}{6(1)} = 4$

$\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}$

$CR_2^4 = \frac{(4+2-1)!}{(4-1)!2!} = \frac{120}{6(2)} = 10$

$\{\alpha,\alpha\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\alpha,\delta\}, \{\beta,\beta\}, \{\beta,\gamma\}, \{\beta,\delta\}, \{\gamma,\gamma\}, \{\gamma,\delta\}, \{\delta,\delta\}$

$CR_3^4 = \frac{(4+3-1)!}{(4-1)!3!} = \frac{720}{6(6)} = 20$

$\{\alpha,\alpha,\alpha\}, \{\alpha,\alpha,\beta\}, \{\alpha,\alpha,\gamma\}, \{\alpha,\alpha,\delta\}, \{\beta,\beta,\beta\}, \{\beta,\beta,\alpha\}, \{\beta,\beta,\gamma\}, \{\beta, \beta,\delta\}, \{\gamma,\gamma,\gamma\}, \{\gamma,\gamma,\alpha\},$
$\{\gamma,\gamma,\beta\}, \{\gamma,\gamma,\delta\}, \{\delta,\delta,\delta\}, \{\delta,\delta,\alpha\}, \{\delta,\delta,\beta\}, \{\delta,\delta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\delta\}, \{\alpha,\gamma,\delta\}, \{\beta,\gamma,\delta\}$

I.4 CONCEPTO DE PROBABILIDAD

El concepto de probabilidad nace con el deseo del hombre de conocer con certeza los eventos futuros. A través de la historia se han desarrollado tres enfoques conceptuales diferentes para definir la probabilidad y determinar los valores de probabilidad:

EL ENFOQUE CLÁSICO

Dice que si hay x posibles resultados favorables a la ocurrencia de un evento A y y posibles resultados desfavorables a la ocurrencia de A, y todos los resultados son igualmente posibles y mutuamente excluyentes (no pueden ocurrir los dos al mismo tiempo), entonces la probabilidad de que ocurra A es:

$$P(A) = \frac{x}{x+y}$$

El enfoque clásico de la probabilidad se basa en la suposición de que cada resultado sea igualmente posible. Además, es llamado enfoque *a priori* porque permite, (en caso de que pueda aplicarse) calcular el valor de probabilidad antes de observar cualquier evento de muestra.

Ejemplo.
Si se tiene en una bombonera 17 bombones rosas y 8 bombones blancos. La probabilidad de sacar un bombón blanco en un intento es.

Solución.
$P(A) = \frac{8}{8+17} = \frac{8}{25} = 0.32$ ó 32%.

EL ENFOQUE DE FRECUENCIA RELATIVA

También llamado enfoque empírico, determina la probabilidad sobre la base de la proporción de veces que ocurre un evento favorable en un número de observaciones. En este enfoque no utiliza la suposición previa de aleatoriedad porque la determinación de los valores de probabilidad se basa en la observación y recopilación de datos.

Ejemplo.
Se ha observado que 7 de cada 50 conductores que pasan por una esquina hablan por teléfono celular en la tarde. Si un agente de transito se para en esa misma esquina un día cualquiera ¿Cuál será la probabilidad de que multe a una persona por hablar por celular mientras conduce por la tarde?

Solución.
$P(A)=\frac{7}{50}=0.14$ ó 14%.

Tanto el enfoque clásico como el enfoque empírico conducen a valores objetivos de probabilidad, en el sentido de que los valores de probabilidad indican a largo plazo la tasa relativa de ocurrencia del evento.

EL ENFOQUE SUBJETIVO

Dice que la probabilidad de ocurrencia de un evento es el grado de creencia por parte de un individuo de que un evento ocurra, basado en toda la evidencia a su disposición. Bajo esta premisa se puede decir que este enfoque es adecuado cuando sólo hay una oportunidad de ocurrencia del evento. Es decir, que el evento ocurrirá o no ocurrirá esa sola vez.

El valor de probabilidad bajo este enfoque es un juicio personal.

Ejemplo.
Hay una probabilidad del 80% de que el año próximo las tasas de interés se mantengan estables.

Concepto de Probabilidad

Se define como cálculo de probabilidad al conjunto de reglas que permiten determinar si un fenómeno ha de producirse, fundando la suposición en el cálculo, las estadísticas o la teoría. La probabilidad es la parte de las matemáticas que trata de manejar con números la incertidumbre.

El valor más pequeño que puede tener la probabilidad de ocurrencia de un evento es igual a 0, el cual indica que el evento es imposible, y el valor mayor es 1, que indica que el evento ciertamente ocurrirá. Así, las probabilidades suelen venir expresadas como decimales, fracciones o porcentajes.

Entonces, si se dice que $P(A)$ es la probabilidad de ocurrencia de un evento A y $P(A')$ la probabilidad de no-ocurrencia de A, se tiene que:

$$0\leq P(A)\leq 1$$

y que: $P(A)+P(A')=1$

I.5 OPERACIONES CON EVENTOS

El uso de conjuntos representados por diagramas de Venn, facilita la compresión del espacio muestral E de los eventos, ya que se puede equiparar con el conjunto universo porque contiene la totalidad de los resultados posibles de un experimento, mientras que los eventos contienen sólo un subconjunto de resultados posibles del experimento. Esto es particularmente útil cuando se efectúan operaciones con eventos.

I.5.1 UNIÓN DE EVENTOS

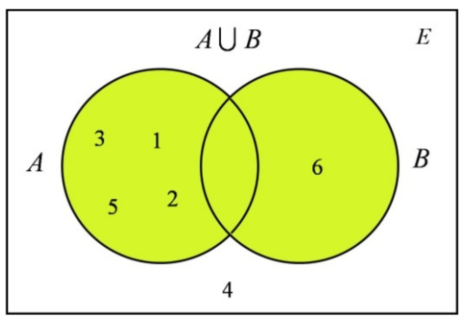
Sean dos eventos A y B de un mismo experimento aleatorio.

Se define como la *unión de los eventos* de A y B al evento que se realiza cuando se realiza A o B y se representa por $A \cup B$.

Nótese como la unión de los eventos de A y B se relaciona con el operador lógico “o”.

Ejemplo.
Sean el espacio muestral del los resultados de lanzar un dado:
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
y los siguientes eventos:
$A =$ "salir número primo" $= \{1, 2, 3, 5\}$
$B =$ ”salir número par mayor a cuatro $= \{6\}$
Obtener $A \cup B$.

Solución.
Si se forma el evento $A \cup B$, "salir número impar o numero primo". Este evento es: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$.
Gráficamente:



I.5.2 INTERSECCIÓN DE EVENTOS

Se define como la *intersección de los eventos* de A y B al evento que se realiza cuando se realizan A y B simultáneamente y se representa por $A \cap B$.

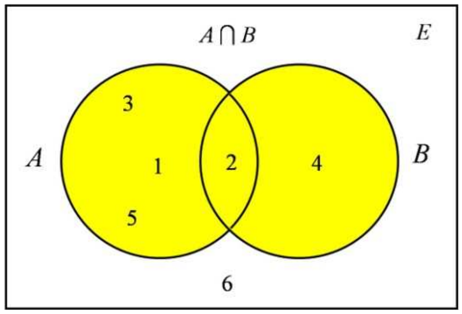
Nótese como la intersección de los eventos A y B se relaciona con el operador lógico “y”.

Ejemplo.
Sean el espacio muestral del los resultados de lanzar un dado:
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
y los siguientes eventos:
$A =$ "salir número primo" $= \{1, 2, 3, 5\}$
$B =$ ”salir número par menor a seis” $= \{2, 4\}$
Obtener $A \cap B$.

Solución.

Si se forma el evento $A \cap B$, "salir número impar y numero primo". Este evento es: $A \cap B = \{2\}$

Gráficamente:



Cuando es imposible que dos eventos se realicen simultáneamente, se dice que dichos eventos son *incompatibles o mutuamente excluyentes*. Es decir, dados dos eventos A y B de un mismo experimento aleatorio, se tiene que $A \cap B = \phi$.

Ejemplo

Al lanzar un dado, los eventos $A = \{3\}$y $B = \{1, 4\}$ son mutuamente excluyentes ya que $A \cap B = \phi$.

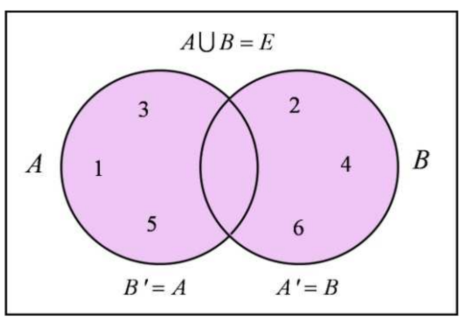
I.5.3 EVENTOS COMPLEMENTARIOS

Se dice que *dos eventos son complementarios* si $A \cap B = \phi$ y $A \cup B = E$. Esto es, si $A' = B$ y $B' = A$.

Ejemplo.

Al lanzar un dado, los eventos $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4,6\}$ son complementarios, ya que $A \cup B = E$.

Gráficamente:



Obsérvese que un evento y su complementario son incompatibles.

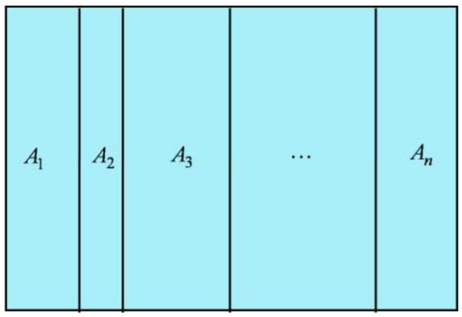
Ejemplo.

Al lanzar una moneda, los eventos $A = \{águila\}$ y $B = \{sol\}$ son incompatibles y complementarios, ya que su unión definen el espacio muestral.

I.5.4 SISTEMA COMPLETO DE EVENTOS

De una manera general, se dice que los eventos $A_1, A_2, A_3, \cdots$ constituyen un *sistema completo de eventos* para un determinado experimento aleatorio, si se verifica que:

1. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = E$
2. $A_1, A_2, A_3, \cdots$ son incompatibles dos a dos.



Ejemplo.
Sean el espacio muestral del los resultados de lanzar un dado:
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
y los siguientes eventos:
$A = \{1, 2, 6\}$
$B = \{3, 4\}$
$C = \{5\}$
Comprobar que forman un sistema completo de eventos

Solución.
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$
$A \cap B = \phi$
$A \cap C = \phi$
$B \cap C = \phi$

I.5.5 EVENTO SEGURO, IMPOSIBLE Y COMPUESTO. ESPACIO COMPUESTO

Un *evento elemental*, es cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio. Los eventos elementales son subconjuntos de E con sólo un elemento.

Un *evento seguro*, cierto o universal es aquel que ocurre siempre. Consta de todos los eventos elementales del espacio muestral E.

Ejemplo.
En un partido de fútbol, el evento $A = \{ganar, empatar, perder\}$, es seguro porque siempre se tendrá alguna de las tres posibilidades.

Un *evento imposible* es aquel que no tiene ningún elemento del espacio muestral E, así que nunca ocurrirá.

Ejemplo.
Al lanzar un dado, el evento $B=\{0\}$, es imposible porque un dado no contiene al número cero.

Los *eventos compuestos* son aquellos que constan de dos o más eventos elementales.

Ejemplo.
Considérese un experimento aleatorio que consiste en el lanzamiento de un dado y una moneda. Un evento compuesto que tiene dos eventos simples puede ser:
$A=\{1,5,6\}$
$B=\{águila\ ,sol\}$

Un espacio compuesto o *espacio producto* es aquel que se forma por el producto cartesiano de dos conjuntos que definen eventos simples.

Ejemplo.
Si $A=\{1,5,6\}$ es un evento del dado
$B=\{águila\}$ es un evento de la moneda
Entonces, el espacio compuesto por esos dos eventos es:
$A\times B=\{(1,águila),(1,sol),(5,águila),(5,sol),(6,águila),(6,sol)\}$

I.6 TEOREMAS DE PROBABILIDAD

1.6.1 TEOREMA DE ADICIÓN

La probabilidad de que alguno de dos eventos pertenecientes a un mismo espacio muestral ocurra se determina mediante la siguiente expresión:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Ejemplo.
Si el experimento es lanzar un dado una vez, el espacio muestral es:
$E=\{1,2,3,4,5,6\}$
Si el evento A es cae un número par
$A=\{2,4,6\}$
Si el evento B es cae un número menor de tres
$B=\{1,2\}$
¿Cuál será la probabilidad de que suceda alguno de estos dos eventos?

Solución.
La probabilidad de A es: $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
la probabilidad de B es: $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
Para aplicar este teorema es necesario conocer la probabilidad de la intersección de estos dos eventos:
$A\cap B=\{2\}$
$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$
Aplicando el teorema de adición:

$$P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3+2-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=0.66\overline{6}\approx 66.66\%$$

Ejemplo.
En una universidad el 50% de los alumnos habla inglés, el 20% francés y el 5% los dos idiomas ¿Cuál es la probabilidad de encontrar alumnos que hablen alguna lengua extranjera?
Solución.
Sea A el evento hablar inglés.
Sea B el evento hablar francés.
El evento hablar francés e inglés es $A\cap B$.

$P(A)=0.5$

$P(B)=0.2$

$P(A\cap B)=0.05$

$P(A\cup B)=0.5+0.2-0.05=0.65=65\%$

1.6.2 TEOREMA DE COMPLEMENTACIÓN

La probabilidad de que el complemento de un evento ocurra está dada por la siguiente expresión:

$$P(A')=1-P(A)$$

Ejemplo.
Si el evento de lanzar un dado es $A=5$
¿Cuál es la probabilidad de que no caiga un cinco?

Solución.

$P(A)=\frac{1}{6}$

$P(A')=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}=0.833\overline{3}\approx 83.33\%$

1.6.3 TEOREMA DE DIFERENCIACIÓN

La probabilidad de que un evento dado ocurra, pero no ocurra otro evento dado pertenecientes al mismo espacio muestral, denotada como $P(A-B)$, está dada por:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

Ejemplo.
Si el experimento es lanzar un dado el evento A es cae un número par y el evento B es que caiga un número menor a tres.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga par pero no menor a tres?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga menor a tres pero no par?

Solución.
a) $A=\{2,4,6\}$
$B=\{1,2\}$

$A \cap B = \{2\}$

Si el evento A es cae un número par y si el evento B es cae un número menor de tres, entonces la probabilidad de que caiga par pero no menor de tres es:

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333\overline{3} \approx 33.33\%$$

b) La probabilidad de que caiga menor de tres pero no par es:

$$P(B) = \frac{2}{6}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = 0.166\overline{6} \approx 16.66\%$$

1.6.4 PROBABILIDAD CONDICIONAL

La *probabilidad condicional* es la probabilidad de que un evento dado ocurra dado que otro evento ocurre. El operador de la probabilidad condicional es el signo $|$.

Ejemplo.
El experimento es extraer aleatoriamente dos canicas de una caja que contiene cinco canicas blancas y cinco canicas verdes.

$$P(A) = \{la\ \ primera\ \ canica\ \ es\ \ blanca\}$$

$$P(B) = \{la\ \ segunda\ \ canica\ \ es\ \ blanca\}$$

$$P(B \mid A) = \{la\ \ segunda\ \ canica\ \ es\ \ blanca\ \ dado\ \ que\ \ la\ \ primera\ \ canica\ \ es\ \ blanca\}$$

$$P(A \cap B) = \{las\ \ dos\ \ canicas\ \ son\ \ blancas\}$$

Al extraer la primera canica, hay en la caja cinco canicas blancas de un total de diez, por lo que la probabilidad es:

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Al extraer la segunda canica hay en la caja cuatro canicas blancas de un total de nueve, por lo que la probabilidad condicional de que la segunda sea blanca dado que la primera fue también blanca es:

$$P(B \mid A) = \frac{4}{9}$$

1.6.5 TEOREMA DE MULTIPLICACIÓN PARA EVENTOS SIMPLES

Dos eventos son *independientes* si la ocurrencia de uno no altera la probabilidad de que suceda el otro.

Para dos eventos independientes A y B, la probabilidad de que ambos eventos sucedan es encontrada mediante la multiplicación de sus dos probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo.
Un dispositivo graba DVD's. Datos anteriores muestran que en ocasiones los DVD's graba mal, y en otras graba muy bien, pero la mayoría de las veces efectúa una grabación adecuada. La siguiente tabla muestra su comportamiento:

Grabación	Probabilidad
Defectuosa	.035
Correcta	.900
Muy buena	.065

Se desea saber la probabilidad de que al revisar tres DVD's, los tres estén grabados correctamente.

Solución.
Se establecen los siguientes eventos:
$A = \{el\ \ primer\ \ DVD\ está\ bien\ grabado\}$
$B = \{el\ segundo\ DVD\ está\ bien\ grabado\}$
$C = \{el\ tercer\ \ DVD\ está\ bien\ grabado\}$
La probabilidad de cada uno de estos eventos independientes es:
$P(A) = 0.9$
$P(B) = 0.9$
$P(C) = 0.9$
Según el teorema de multiplicación la probabilidad de que los tres eventos ocurran es:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cap B) = (0.9)(0.9)(0.9) = 0.729 = 72.9\%$

Ejemplo.
En una ciudad del norte del país, las estadísticas muestran que llueve sólo el 12% de los días. Por otro lado, se ha observado que cuando un día es lluvioso, hay una probabilidad del 15% de que el día posterior también lo sea. Calcular la probabilidad de que un fin de semana completo sea lluvioso.

Solución:
$S = \{sábado\ \ soleado\}$
$D = \{do\,min\,go\ soleado\}$
La única manera en que un fin de semana completo sea soleado es que lo sea en primer lugar el sábado, y que el domingo posterior también. Es decir:
$P(S \cap D) = P(S) \cdot P(D) = 0.12(0.15) = 0.018 = 1.8\%$

1.6.6 TEOREMA DE MULTIPLICACIÓN PARA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Para dos eventos A y B, donde A depende de la ocurrencia de B, la probabilidad de que sucedan ambos eventos está dada por la expresión:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Ejemplo.
En una dulcera hay diez chocolates y cinco dulces que tienen la misma envoltura, ¿cual es la probabilidad de que al principio se saquen dos dulces de forma consecutiva?

Solución.
$A = \{la \ primera \ elección \ es \ un \ dulce\}$
$B = \{la \ segunda \ elección \ es \ un \ dulce\}$
La probabilidad de que suceda el evento A es:
$P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$
La probabilidad de que suceda el evento dado que ya sucedió A, y sólo hay cuatro dulces de catorce elementos:
$P(A \mid B) = \frac{4}{14}$
Según el teorema de multiplicación la probabilidad de que los dos eventos ocurran es:
$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{14}\right) = \frac{4}{42} = \frac{2}{21} \approx 0.0952 = 9.52\%$

1.6.7 TEOREMA DE PROBABILIDAD TOTAL

Sea $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ un sistema de eventos tales que la probabilidad de ellos es distinta de cero y sea B un evento cualquiera del que se conocen sus probabilidades condicionales $P(B \mid A_i)$ entonces la probabilidad del evento B está dada por:

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

Ejemplo.
Se tienen dos urnas, y cada una de ellas contiene un número diferente de bolas blancas y rojas:
- Primera urna, U_1: tres bolas blancas y dos negras.
- Segunda urna, U_2: cuatro bolas blancas y dos negras.

Se realiza el siguiente experimento aleatorio:
Se tira una moneda al aire y si sale águila se elige una bola de la primera urna, y si sale sol de la segunda.
¿Cuál es la probabilidad de que salga una bola blanca?

Solución.
La situación puede ser resumirse así:
Probabilidad de sacar una bola blanca de la urna 1: $P(B \mid U_1) = \frac{3}{5}$
Probabilidad de sacar una bola blanca de la urna 2: $P(B \mid U_2) = \frac{4}{6}$
Como al lanzar la moneda, hay las mismas posibilidades, entonces:
Probabilidad de elegir la urna 1: $P(U_1) = \frac{1}{2}$
Probabilidad de elegir la urna 2: $P(U_2) = \frac{1}{2}$
Como U_1 y U_2 forman un sistema incompatible y excluyente de eventos (la bola resultado debe provenir de una de esas dos urnas y de una sólo de ellas), aplicando el teorema de la probabilidad total se tiene que:
$P(B) = P(U_1) \cdot P(B \mid U_1) + P(U_2) \cdot P(B \mid U_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{3}{10} + \frac{4}{12} = \frac{19}{30} = 0.633\bar{3} \approx 63.33\%$

1.6.8 TEOREMA DE BAYES

Sean $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n \in E$ eventos incompatibles y sea B entonces:

Entonces las probabilidades $P(A_i \mid B)$ vienen dadas por la expresión:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B \mid A_1)}{P(A_1)\cdot P(B \mid A_1) + P(A_2)\cdot P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot P(B \mid A_n)}$$

Ejemplo.
Se tienen tres urnas: U_1 con tres bolas rojas y cinco negras, U_2 con dos bolas rojas y una negra y U_3 con dos bolas rojas y tres negras. Si se escoge una urna al azar y se extrae una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna U_1?

Solución.
Si R es el evento de sacar bola roja.

Probabilidad de sacar una bola roja de la urna 1: $P(R \mid U_1) = \frac{3}{8}$

Probabilidad de sacar una bola roja de la urna 2: $P(R \mid U_2) = \frac{2}{3}$

Probabilidad de sacar una bola roja de la urna 3: $P(R \mid U_3) = \frac{2}{5}$

Probabilidad de elegir la urna 1: $P(U_1) = \frac{1}{3}$

Probabilidad de elegir la urna 2: $P(U_2) = \frac{1}{3}$

Probabilidad de elegir la urna 3: $P(U_3) = \frac{1}{3}$

La probabilidad pedida es $P(U_1 \mid R)$. Utilizando el teorema de Bayes, se tiene:

$$P(U_1 \mid R) = \frac{P(U_1)\cdot P(R \mid U_1)}{P(U_1)\cdot P(R \mid U_1) + P(U_2)\cdot P(R \mid U_2) + P(U_3)\cdot P(R \mid U_3)}$$

$$P(U_1 \mid R) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{2}{15}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{173}{360}} = \frac{360}{1{,}384} = \frac{45}{173} \approx 0.2601 \approx 26.01\%$$

Ejemplo.
En una tienda, trabajan 3 cajeras, Ana, Blanca, y Clara. Ana realiza el 50% de los cobros, Blanca el 30% y Clara el 20%. Cuando cobra Ana hay un 1% de probabilidad de que lo haga mal, cuando lo hace Blanca hay un 2% de que cobre mal, y si cobra Clara hay un 3% de probabilidad de que se equivoque. Un cliente se quejó con el dueño porque le cobraron mal. ¿Cual es la probabilidad de que el mal cobro lo hizo Ana?

Solución.

$M = \{\textit{se hizo un mal cobro}\}$

$A = \{\textit{el cobro fue heho por Ana}\}$

$B = \{\textit{el cobro fue heho por Blanca}\}$

$C = \{ el\ cobro\ \ fue\ heho\ \ por\ Clara\ \}$

$P(A) = 0.5$

$P(B) = 0.3$

$P(C) = 0.2$

$P(M \mid A) = 0.01$

$P(M \mid B) = 0.02$

$P(M \mid C) = 0.03$

Utilizando el teorema de Bayes para encontrar la probabilidad de que el cobro lo hizo Ana dado que fue un mal cobro:

$$P(A \mid M) = \frac{P(A)\cdot P(M \mid A)}{P(A)\cdot P(M \mid A) + P(B)\cdot P(M \mid B) + P(C)\cdot P(M \mid C)}$$

Sustituyendo los valores:

$$P(A \mid M) = \frac{0.5(0.01)}{0.5(0.01) + 0.3(0.02) + 0.2(0.03)} = \frac{0.005}{0.005 + 0.006 + 0.006} \approx 0.2941 \approx 29.41\%$$

I.7 VARIABLES ALEATORIAS: DISCRETAS Y CONTÍNUAS

Si en un experimento aleatorio a cada evento aleatorio elemental se le asigna un valor numérico se obtiene una variable aleatoria. Es decir, una variable que lleva asociada una probabilidad. La probabilidad de un valor concreto de la variable es la probabilidad que corresponde a los eventos aleatorios elementales a los que se ha asignado ese valor numérico.

Ejemplo.
En el experimento aleatorio "lanzar un dado" se asigna a cada cara del dado su valor numérico (esta asignación aparece de forma natural). Así se genera una variable aleatoria que toma seis valores, del uno al seis con igual probabilidad $\left(\frac{1}{6}\right)$ cada uno de ellos. Pero, con este mismo experimento, se pueden generar otras variables aleatorias (no tan naturales) como puede ser : asignar el valor uno a las caras que son múltiplos de tres y el valor cero a las que no lo son, apareciendo una variable aleatoria que tiene dos valores, el uno con probabilidad $\frac{1}{3}$ y el cero con probabilidad $\frac{2}{3}$.

Crear una variable aleatoria no tiene mucho sentido a menos que se utilice en un determinado contexto, por ejemplo, se puede utilizar la segunda variable aleatoria que se ha creado para apostar si sale o no múltiplo de tres.

En concreto, una variable aleatoria se construye al atribuir un número (positivo, negativo o cero) a cada uno de los eventos aleatorios que forman el espacio muestral de un experimento aleatorio. La probabilidad de cada valor de la variable es la probabilidad conjunta de los eventos que dan lugar a ese valor. Es decir, se define una variable aleatoria como una aplicación del espacio muestral E sobre el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$.

Se utilizan letras mayúsculas $X, Y, \cdots$ para designar variables aleatorias, y las respectivas minúsculas $x, y, \cdots$ para designar valores concretos de las mismas.

Según la amplitud del campo de variación de la función se pueden distinguir dos tipos de variables aleatorias:

- Una variable aleatoria es *discreta* si toma valores en un conjunto finito o infinito numerable. Es decir sólo toma valores enteros.

- Una variable aleatoria es *continua* si puede tomar valores en un conjunto infinito no numerable. Es decir, puede tomar todos los valores de un intervalo de $\mathbf{R}$.

Ejemplo.
Si un experimento aleatorio consiste en lanzar dos dados, podemos asignar a cada resultado la suma de los puntos aparecidos en cada dado, entonces la variable es discreta.

Ejemplo.
Si un experimento que consiste en elegir al azar 500 personas y medir su estatura. La ley que asocia a cada persona con su talla es una variable aleatoria continua.

Como ejemplo típico de variable aleatoria discreta está la distribución binomial, y como ejemplo común de variable aleatoria continua está la distribución normal.

I.8 FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN PARA VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS Y CONTINUAS

1.8.1 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Sea un experimento aleatorio que tenga las siguientes características:

- En cada prueba del experimento sólo son posibles *dos* resultados: el evento A (éxito) y su contrario A' (fracaso).
- El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente. La probabilidad del evento A es constante, se representa por p, y no varía de una prueba a otra. La probabilidad de A' es $1-p$ y se representa por q .
- El experimento consta de un número n de pruebas.

A todo experimento que tenga estas características sigue el modelo de *distribución binomial*. A la variable X que expresa el número de éxitos obtenidos en cada prueba del experimento, se le llama *variable aleatoria binomial*.

La variable binomial es una variable aleatoria discreta, sólo puede tomar los valores $0,1,2,3,\cdots,n$ suponiendo que se han realizado n pruebas. Como hay que considerar todas las maneras posibles de obtener k -éxitos y $n-k$ fracasos, se deben calcular las combinaciones de n sobre k .

La distribución binomial se suele representar por $B(n,p)$ siendo n y p sus parámetros.

La función de probabilidad de la distribución binomial, también denominada función de la distribución de *Bernoulli* está dada por:

$$F(x_i)=P(X<x_i)=\binom{n}{0}p^0q^n+\binom{n}{1}p^1q^{n-1}+\binom{n}{2}p^2q^{n-2}+\cdots+\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

siendo k el mayor número entero menor o igual a x_i .

Esta función de distribución proporciona, para cada número real x_i, la probabilidad de que la variable X tome valores menores o iguales que x_i.

La definición de distribución binomial establece que la probabilidad de obtener k-éxitos si se realiza n veces un experimento en el que se puede tener éxito con probabilidad p y fracaso con probabilidad $q = 1 - p$, es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Como el cálculo de $F(x_i) = P(X < x_i)$ y de las probabilidades puede resultar algo tedioso se han construido tablas para algunos valores de n y p que facilitan el trabajo.

En general, sea X una variable aleatoria discreta correspondiente a una distribución binomial.

$$P(X = k) \quad \Rightarrow \quad k \quad (\text{número de exitos},\ 0 \le k \le n)$$
$$B(n, p) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n & (\text{número de pruebas},\ n > 0) \\ p & (\text{probabilidad de éxito},\ 0 \le p \le 1) \end{cases}$$

Ejemplo.
Una máquina fabrica una determinada pieza y se sabe que produce un 7 por 1000 de piezas defectuosas. Hallar la probabilidad de que al examinar 50 piezas sólo haya una defectuosa.

Solución.
Se trata de una distribución binomial de parámetros $B(50, 0.007)$ y se necesita calcular la probabilidad $P(X = 1)$.

$$P(X = 1) = \binom{50}{1} 0.007^1 0.993^{49} = \frac{50!}{(50-1)!1!}(0.007)(0.708782) = 0.248073$$

Ejemplo.
La probabilidad de éxito de una determinada vacuna es 0.72. Calcular la probabilidad de a que una vez administrada a 15 pacientes:
a) Ninguno sufra la enfermedad
b) Todos sufran la enfermedad
c) Dos de ellos contraigan la enfermedad

Solución.
Se trata de una distribución binomial de parámetros $B(15, 0.72)$:

a) $P(X = 15) = \binom{15}{15} 0.72^{15} 0.28^{0} = \frac{15!}{(15-15)!15!}(0.007244)(1) = 0.007244$

b) $P(X = 0) = \binom{15}{0} 0.72^{0} 0.28^{15} = \frac{15!}{(15-0)!0!}(1)(5.0976 \times 10^{-9}) = 5.0976 \times 10^{-9}$

c) $P(X = 13) = \binom{15}{13} 0.72^{13} 0.28^{2} = \frac{15!}{(15-13)!13!}(0.013974)(0.0784) = 0.115034$

La distribución binomial tiene sus medidas de tendencia central y de dispersión que son:

- Valor esperado o media: $\mu = np$
- Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{npq}$
- Varianza: $\sigma^2 = npq$

Ejemplo.
La probabilidad de que un teléfono celular salga de fábrica defectuoso es 4%. Hallar:
a) El número de teléfonos defectuosos esperados en un lote de 1,000.
b) La varianza.
c) La desviación estándar.

Solución.
a) $\mu = 1{,}000(0.04) = 40$ celulares defectuosos
b) $\sigma^2 = 1{,}000(0.04)(0.96) = 38.4$
c) $\sigma = \sqrt{1{,}000(0.04)(0.96)} = \sqrt{38.4} = 6.196$

La distribución binomial se puede expresar de forma gráfica en la que el eje de las abscisas muestra a la variable aleatoria discreta X y el eje de las ordenadas sea su respectiva probabilidad.

Ejemplo.
En una tienda los cinco empleados llegan tarde a menudo. El dueño ha llegado a la conclusión de que hay una probabilidad de 0.4 de que un empleado llegue tarde y de que los empleados lleguen independientemente uno de otro. Graficar una distribución binomial de probabilidad que ilustre las probabilidades de que 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 empleados lleguen tarde simultáneamente.

Solución.
$p = 0.4$
$q = 0.6$
$n = 5$
Aplicando la fórmula binomial para calcular cada valor de X:

Para $X = 0$: $P(X = 0) = \binom{5}{0} 0.6^5 0.4^0 = \frac{5!}{(5-0)!\,0!}(0.07776)(1) = 0.07776$

Para $X = 1$: $P(X = 1) = \binom{5}{1} 0.6^4 0.4^1 = \frac{5!}{(5-1)!\,1!}(0.1296)(0.4) = 0.2592$

Para $X = 2$: $P(X = 2) = \binom{5}{2} 0.6^3 0.4^2 = \frac{5!}{(5-2)!\,2!}(0.216)(0.16) = 0.3456$

Para $X = 3$: $P(X = 3) = \binom{5}{3} 0.6^2 0.4^3 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!}(0.36)(0.064) = 0.2304$

Para $X = 4$: $P(X = 4) = \binom{5}{4} 0.6^1 0.4^4 = \frac{5!}{(5-4)!\,4!}(0.6)(0.0256) = 0.0768$

Para $X = 5$: $P(X = 5) = \binom{5}{5} 0.6^0 0.4^5 = \frac{5!}{(5-5)!\,5!}(1)(0.01024) = 0.01024$

Graficando estos resultados se obtiene su distribución binomial:

Obteniendo las medidas de tendencia central:

a) $\mu = np = 5(0.4) = 2$

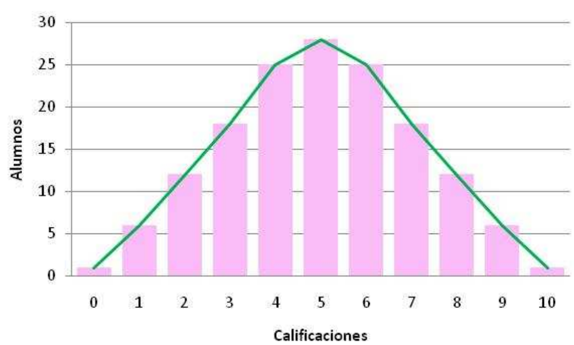
b) $\sigma^2 = npq = 5(0.4)(0.6) = 1.2$

c) $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5(0.4)(0.6)} = \sqrt{1.2} = 1.095$

1.8.2 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL

Al iniciar el análisis estadístico de una serie de datos, se obtienen sus medidas descriptivas y se puede estudiar de forma simple el comportamiento de estas variables a través de histogramas. Como ya se explicó en la unidad I, para construir este tipo de gráficas, se divide el rango de valores de la variable en intervalos de igual longitud, representando sobre cada intervalo un rectángulo con área proporcional al número de datos en ese rango. Uniendo los puntos medios del extremo superior de las barras, se obtiene el llamado polígono de frecuencias.

Si se tiene una gran cantidad de valores observados de la variable de interés, se podría construir un histograma en el que las bases de los rectángulos fuesen cada vez más pequeñas, de modo que el polígono de frecuencias tendría una apariencia cada vez más suavizada. Esta curva suave representa de modo intuitivo la distribución teórica de la característica observada. Es la llamada *función de densidad*. Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra una aproximación de la función de densidad del desempeño escolar de 154 alumnos de una primaria privada:



Muchas variables aleatorias continuas presentan una función de densidad cuya gráfica tiene forma de campana. La *distribución normal* es frecuentemente utilizada en las aplicaciones estadísticas. Su nombre expresa la normalidad con la que ciertos fenómenos tienden a parecerse en su comportamiento a esta distribución.

La importancia de la distribución normal radica en que hay muchas variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal. Por ejemplo:

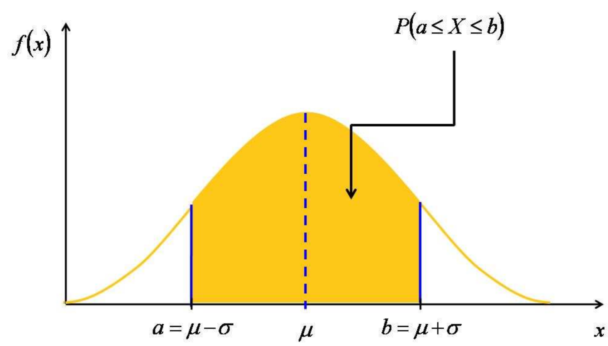
- Caracteres morfológicos de individuos (tallas, pesos, longitudes) de personas, animales o plantas.
- Caracteres fisiológicos (efecto de una misma dosis de un fármaco o el efecto de una misma cantidad de abono).
- Caracteres sociológicos (consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos o las calificaciones de examen).
- Caracteres psicológicos (coeficiente intelectual o el grado de adaptación a un medio).
- Errores cometidos al medir ciertas magnitudes.
- Valores estadísticos muestrales, tales como la media.
- En general cualquier característica que se obtenga como suma de muchos factores.

La distribución normal fue reconocida por primera vez por el francés Abraham de Moivre, sin embargo, fue Carl Friedrich Gauss quien elaboró desarrollos más profundos y formuló la ecuación de la curva. Por ese motivo también se le conoce como la "campana de Gauss". La distribución de una variable normal está completamente determinada por dos parámetros, su media μ y su desviación estándar σ.

La función densidad de la distribución normal está dada por:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \_(1)$$

Esta función determina la curva en forma de campana que se muestra a continuación:

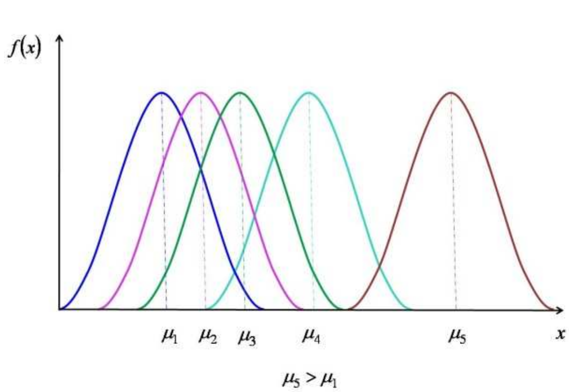


Se dice que una característica X sigue una distribución normal de media μ y varianza σ^2, y se denota como $X \approx N(\mu,\sigma)$, si su función de densidad viene dada por la ecuación (1).

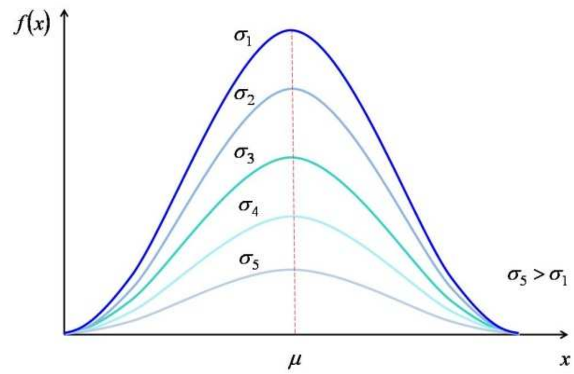
La distribución normal posee cinco propiedades de relevancia:

1. Tiene una única moda, que coincide con su media y su mediana.
2. La curva normal es asintótica al eje de abscisas. Por ello, cualquier valor entre $-\infty$ y $+\infty$ es teóricamente posible. El área total bajo la curva es, por lo tanto, igual a 1.
3. Es simétrica con respecto a su media μ. Esto significa que existe una probabilidad de un 50% de observar un dato mayor que la media, y un 50% de observar un dato menor.

4. El área bajo la curva comprendido entre los valores situados aproximadamente a dos desviaciones estándar de la media es igual a 0.95. En concreto, existe un 95% de posibilidades de observar un valor comprendido en el intervalo $(\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma)$.
5. La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros μ y σ. La media indica la posición de la campana, de modo que para diferentes valores mayores de μ la gráfica es desplazada a la derecha (ver figura de abajo a la izquierda). Por su parte, la desviación estándar determina el grado de aplanamiento de la curva ya que cuanto mayor sea σ, más se dispersarán los datos en torno a la media y la curva será más plana (ver figura de abajo a la derecha). Un valor pequeño de este parámetro implica, por tanto, una gran probabilidad de obtener datos cercanos al valor medio de la distribución. Estos comportamientos se muestran en las siguientes gráficas:



Distribuciones con distinta media e igual desviación estándar



Distribuciones con distintas desviaciones estándar e igual media

En la gráfica de la campana de Gauss de la página anterior, el eje horizontal se levantan perpendiculares a los puntos a y b. Esto implica que el área bajo la curva delimitada por esas rectas indica la probabilidad de que la variable X tome un valor cualquiera en ese intervalo.

Por lo tanto, para obtener la probabilidad la función $f(x)$, se debe integrar entre los límites de la variable x. Esto es:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

La integral anterior determina el área bajo la curva de la función, desde a hasta b, que corresponde a la probabilidad buscada. Sin embargo, integrar esta función es no es fácil.

Debido a la dificultad que se presenta para integrar esta función cada vez que sea necesario, lo que se hace es tipificar o estandarizar el valor de la variable X, que corresponde a una distribución de media 0 y varianza 1 (a esto se le conoce como *distribución normal estándar*).

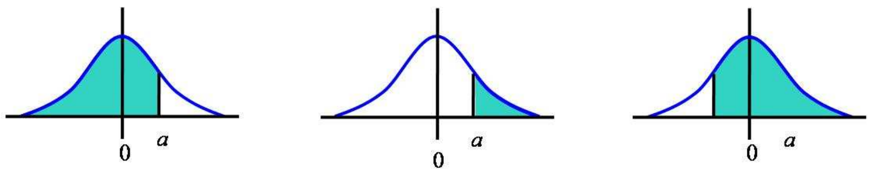
A partir de cualquier variable X que siga una distribución $N(\mu, \sigma)$, se puede obtener otra característica Z con una distribución normal estándar, al efectuar la transformación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

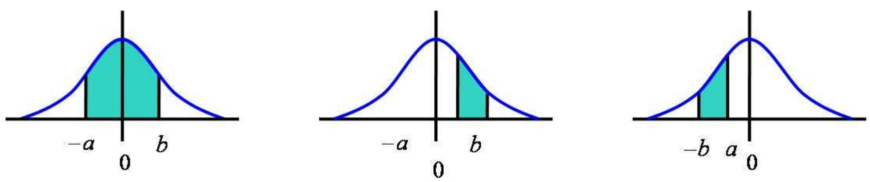
Este valor de Z es buscado en una tabla donde vienen áreas asociadas a este valor, y haciendo uso de los valores tabulados, se determina la probabilidad requerida. La tabla que es usada para calcular las probabilidades se muestra en la siguiente página.

Es importante resaltar que no siempre el valor buscado es el del intervalo $Z < a$. Existen casos en que se requiere encontrar la probabilidad de un valor complementario o la de un valor negativo.

Las siguientes figuras muestran seis casos posibles para encontrar las probabilidades.



$P(Z \le a) \rightarrow Tablas$ $\quad$ $P(Z > a) = 1 - P(Z \le a)$ $\quad$ $P(Z \le -a) = 1 - P(Z \le a)$



$P(-a < Z \le b) = P(Z \le b) - [1 - P(Z \le a)]$ $\quad$ $P(a < Z \le b) = P(Z \le b) - P(Z \le a)$ $\quad$ $P(-b < Z \le -a) = P(a < Z \le b)$

Tabla. Valores de Z para la de distribución de la normal tipificada

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Ejemplo.
El tiempo medio en realizar una misma tarea por parte de los empleados de una empresa se distribuye según una distribución normal, con media de 5 días y desviación estándar de 1.25 días. Calcular el porcentaje de empleados que realizan la tarea en un tiempo inferior a 7 días.

Solución.
Si X es la variable que define la tarea de la empresa.
$\mu = 5$ días
$\sigma = 1.25$ días
Como su distribución no es $N(0,1)$ no se puede utilizar la tabla para calcular la probabilidad que se busca. Sin embargo, si se estandariza la distribución, aplicando la transformación se obtiene la variable:

$$Z = \frac{7-5}{1.25} = 1.6$$

de la tabla, la probabilidad acumulada para el valor 1.6 es de:

$$P(X < 7) = P(Z < 1.6) = 0.9452$$

Por lo tanto, el porcentaje de empleados que realizan la tarea en un tiempo inferior a 7 días es de aproximadamente 94.52% .

Ejemplo.
El peso de las personas de una determinada población sigue una distribución aproximadamente normal, con una media de 80 Kg y una desviación estándar de 10 Kg. Calcular la probabilidad de que una persona, elegida al azar, tenga un peso superior a 100 Kg.

Solución.
a) Si X es la variable que representa el peso de los individuos en esa población, ésta sigue una distribución $N(80,10)$. Como su distribución no es $N(0,1)$ no se puede utilizar la tabla para calcular la probabilidad que se busca. Sin embargo, si se estandariza la distribución, aplicando la transformación se obtiene la variable:

$$Z = \frac{X-80}{10}$$

y aplicar puede aplicarse la tabla. Así, la probabilidad que se desea calcular será:

$$P(X > 100) = P\left(Z > \frac{100-80}{10}\right) = P(Z > 2)$$

Como el área total bajo la curva es igual a 1, se puede deducir que:

$$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2)$$

Aplicando la tabla correspondiente, la probabilidad es:

$$P(Z \leq 2) = 0.9772$$

Por lo tanto, la probabilidad buscada de que una persona elegida aleatoriamente de esa población tenga un peso mayor de 100 Kg. es:

$$1 - 0.9772 = 0.0228 \approx 2.28\%$$

b) Para que la probabilidad de que el peso de un sujeto esté entre 60 y 100 Kg:

$$P(60 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{60-80}{10} \leq Z \leq \frac{100-80}{10}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2)$$

Tomando $a = -2$ y $b = 2$, se deduce que:

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2)$$

Se obtuvo que $P(Z \le 2) = 0.9772$, sin embargo para calcular $P(Z \le -2)$ se tiene el problema de que las tablas estándar no proporcionan el valor de $P(Z \le z)$ para valores negativos de la variable. Para resolver esto, se hace uso de la simetría de la distribución normal:

$P(Z \le -2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

Finalmente, la probabilidad buscada de que una persona elegida al azar tenga un peso entre 60 y 100 Kg., es de:

$0.9772 - 0.0228 = 0.9544 \approx 95.44\%$

Ejemplo.

Una lámpara fluorescente común tiene una duración distribuida normalmente, con una media de 7,200 horas y una desviación estándar de 1,000 horas. Un competidor ha inventado un sistema de iluminación fluorescente compacto que asegura que la nuevo lámpara compacto tiene una duración distribuida normalmente con una media de 7,500 horas y una desviación estándar de 1,200 horas. Se desea conocer: a) ¿cuál lámpara fluorescente tiene mayor probabilidad de tener una duración mayor de 9,000 horas? b. ¿Cuál lámpara tiene mayor probabilidad de tener una duración de menos de 5,000 horas?

Solución.

a) Si X_1 es la variable que define la duración en horas de una lámpara fluorescente del primer fabricante.

$\mu_1 = 7{,}200$ horas

$\sigma_1 = 1{,}000$ horas

aplicando la transformación:

$$Z_1 = \frac{9{,}000 - 7{,}200}{1{,}000} = 1.8$$

de la tabla, se obtiene que:

$P(X_1 < 9{,}000) = P(Z_1 < 1.8) = 0.9641$

$P(X_1 > 9{,}000) = 1 - 0.9641 = 0.0359 \approx 3.59\%$

Si X_2 es la variable que define la duración en horas de una lámpara del competidor.

$\mu_2 = 7{,}500$ horas

$\sigma_2 = 1{,}200$ horas

aplicando la transformación:

$$Z_2 = \frac{9{,}000 - 7{,}500}{1{,}200} = 1.25$$

de la tabla, se obtiene que:

$P(X_2 < 9{,}000) = P(Z_2 < 1.25) = 0.8944$

$P(X_2 > 9{,}000) = 1 - 0.8944 = 0.1056 \approx 10.56\%$

Por tanto la lámpara fluorescente del competidor tiene una probabilidad mayor de durar más de 9,000 horas.

b) $\mu_1 = 7{,}200$ horas

$\sigma_1 = 1{,}000$ horas

aplicando la transformación:

$$Z_1 = \frac{5{,}000 - 7{,}200}{1{,}000} = -2.2$$

de la tabla, se obtiene que:

$P(X_1 < 5{,}000) = P(Z_1 < -2.2) = 1 - P(Z_1 < 2.2) = 1 - 0.9861 = 0.0139 \approx 1.39\%$

$\mu_2 = 7{,}500$ horas

$\sigma_2 = 1{,}200$ horas
aplicando la transformación:

$$Z_2 = \frac{5{,}000 - 7{,}500}{1{,}200} = -2.083$$

de la tabla, se obtiene que:

$$P(X_2 < 5{,}000) = P(Z_2 < -2.083) = 1 - P(Z_2 < 2.083) = 1 - 0.9812 = 0.0188 \approx 1.88\%$$

Por lo tanto, la lámpara fluorescente que tiene una mayor probabilidad de durar menos de 5,000 horas es el del competidor.