CONJUNTOS

UNIDAD I

I.1 DEFINICIÓN DE CONJUNTO

Un *conjunto* es un grupo de elementos u objetos especificados en tal forma que se puede afirmar con certeza si cualquier objeto dado pertenece o no a la agrupación. Para denotar a los conjuntos, se usan letras mayúsculas.

Cuando un elemento x_1 pertenece a un conjunto A se expresa de forma simbólica como: $x_1 \in A$. En caso de que un elemento y_1 no pertenezca a este mismo conjunto se utiliza la notación: $y_1 \notin A$

Existen cuatro formas de enunciar a los conjuntos:

1) Por *extensión* o enumeración: los elementos son encerrados entre llaves y separados por comas. Es decir, el conjunto se describe listando todos sus elementos entre llaves.

2) Por *comprensión*: los elementos se determinan a través de una condición que se establece entre llaves. En este caso se emplea el símbolo | que significa “tal que". En forma simbólica es:

$$A=\{\ x \ \mid\ P(x)\ \}=\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\ \}$$

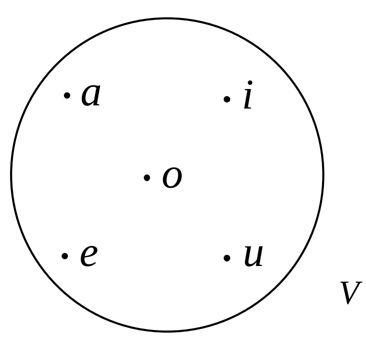
que significa que el conjunto A es el conjunto de todos los elementos x tales que la condición $P(x)$ es verdadera, como x_1, x_2, x_3, etc[1].

3) *Diagramas de Venn*: son regiones cerradas que sirven para visualizar el contenido de un conjunto o las relaciones entre conjuntos[2].

4) Por *descripción verbal:* Es un enunciado que describe la característica que es común para los elementos.

Ejemplo.
Dada la descripción verbal “el conjunto de las letras vocales”, expresarlo por extensión, comprensión y por diagrama de Venn.

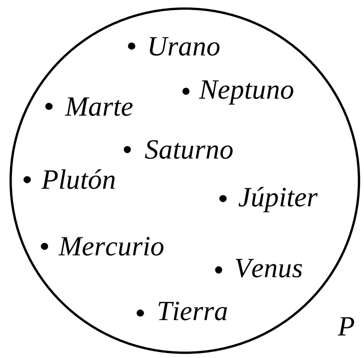
Solución.
Por extensión: $V=\{a, e, i, o, u\}$
Por comprensión: $V=\{x \ \mid\ x \text{ es una vocal}\}$
Por diagrama de Venn:



[1] La notación $P(x)$ no representa un producto, es una condición que deben satisfacer los elementos para pertenecer a un conjunto.
[2] En el caso particular de que un conjunto tenga un sólo elemento numérico, a menos de que se haga la distinción, no representa el número de elementos que posee el conjunto.

Ejemplo.
Expresar de las tres formas al conjunto de los planetas del sistema solar.

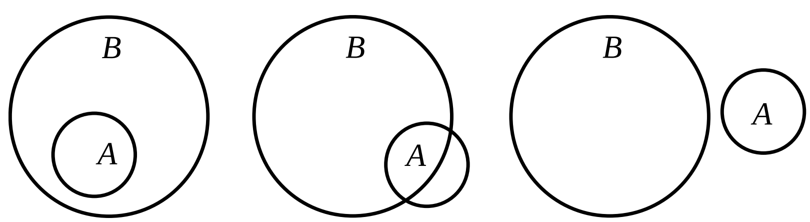
Solución.
Por extensión: $P=\{Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno, Plutón\}$
Por comprensión: $P=\{\, x \mid x \text{ es un planeta del sistema solar} \,\}$
Por diagrama de Venn:



Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento del conjunto B, se dice que A es un *subconjunto* de B. La notación $A \subset B$ significa que A está incluido en B y se lee: "A es subconjunto de B" o "A está contenido en B".

Si no todos los elementos de un conjunto A son elementos del conjunto B, se dice que A no es subconjunto de B. En este caso la notación $A \not\subset B$ significa que A no es un subconjunto de B.

Gráficamente, esto es:



$A \subset B$	$A \not\subset B$	$A \not\subset B$
$B \not\subset A$	$B \not\subset A$	$B \not\subset A$

En los ejemplos anteriores, si $F=\{a, e, o\}$ es el conjunto de las vocales fuertes y $S=\{Mercurio, Venus\}$ es el conjunto de planetas que no poseen satélites, entonces se cumple que: $F \subset V$ y que $S \subset P$. De la misma forma, nótese como: $F \not\subset P$, $S \not\subset V$, $F \not\subset S$ y $S \not\subset F$.

La *cardinalidad* de un conjunto se define como el número de elementos que posee. Se denota por medio de los símbolos η o $\#$.
De los conjuntos anteriores: $\eta(V)=5$, $\eta(F)=3$, $\eta(P)=9$ y $\eta(S)=2$.

I.2 CONJUNTOS CON NOMBRES ESPECÍFICOS

- Un conjunto *vacío* o *nulo* es aquel que no posee elementos. Se denota por: ϕ o bien por $\{\ \}$. El conjunto vacío siempre forma parte de otro, así que es subconjunto de cualquier conjunto.

Ejemplos.

$\phi = \{\ x \mid x \text{ son los dinosaurios que viven en la actualidad}\ \}$

$\{\ \} = \{\ x \mid x \text{ son los hombres mayores de } 300 \text{ años}\}$

$\phi = \{\ x \mid x \text{ son números positivos menores que cero}\}$

- Un conjunto *universal* es aquel que contiene a todos los elementos bajo consideración. Se denota por U. Gráficamente se le representará mediante un rectángulo.

Ejemplos.

$U = \{\ x \mid x \text{ son los días de la semana}\ \} = \{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo\ \}$

$A = \{\ x \mid x \text{ son los días de la semana inglesa}\} = \{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes\}$

$B = \{\ x \mid x \text{ son los días del fin de semana}\} = \{sábado, domingo\}$

$C = \{\ x \mid x \text{ son los días de la semana con menos de siete letras}\} = \{lunes, martes, jueves, sábado\}$

Nótese cómo: $A \subset U, \quad B \subset U, \quad C \subset U$

- Un conjunto *finito* es aquel cuyos elementos pueden ser contados.

Ejemplos.

$J = \{\ x \mid x \text{ es el número de un día del mes de junio}\}$

$K = \{\ x \mid x^2 = 4\}$

$L = \{\ x \mid x \text{ es la cantidad de autos en la ciudad de México}\}$

- Un conjunto *infinito* es aquel cuyos elementos no pueden ser contados, es decir, su cardinalidad no está definida.

Ejemplos.

$N = \{1,3,5,7,9,11,\cdots\}$

$M = \{2,4,6,8,10,12,\cdots\}$

$Q = \{\ x \mid x \text{ es la cantidad de puntos en una línea}\}$

- Dos conjuntos son *iguales* si tienen exactamente los mismos elementos. Se denota por el símbolo $=$.

Ejemplo.

$R = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$

$S = \{\ x \mid x \text{ es un dígito}\}$

$R = S$

- Dos conjuntos son *desiguales* si por lo menos difieren en un elemento, es decir, si no tienen exactamente los mismos elementos. Se denota por el símbolo $\neq$.

Ejemplo.

$D = \{ x \mid x^2 = 9 \}$

$E = \{ -2, 2 \}$

$D \neq E$

- Dos conjuntos son *equivalentes* si tienen la misma cantidad de elementos, es decir, si poseen la misma cardinalidad. Se denota por el símbolo $\approx$.

Ejemplos.

$W = \{ x \mid x \text{ son las estaciones del año} \}$

$Z = \{ x \mid x \text{ es un punto cardinal} \}$

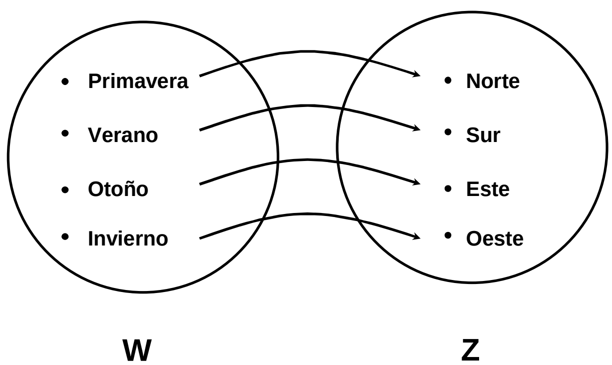
$\eta(W) = 4$

$\eta(Z) = 4$

$W \approx Z$

Cuando los conjuntos son equivalentes existe una correspondencia uno a uno o *biunívoca*. Esto significa que se puede establecer una relación que asocie a cada elemento del primer conjunto con un único elemento del segundo conjunto sin que sobren elementos en ningún conjunto.

En el ejemplo anterior:

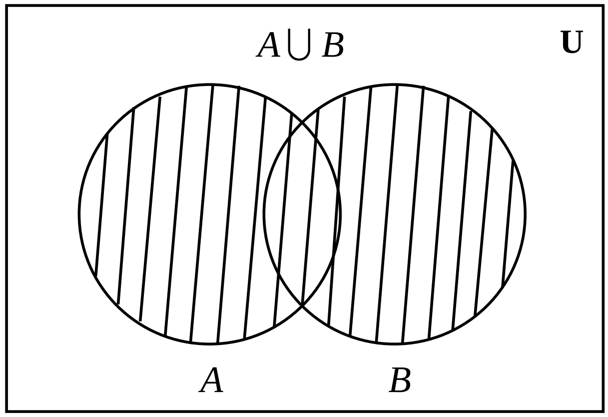


I.3 OPERACIONES CON CONJUNTOS

- La *unión* de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos de A con todos los elementos de B sin repetir ninguno y se denota como $A \cup B$. Esto es:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \quad o \quad x \in B \}$$

Gráficamente:

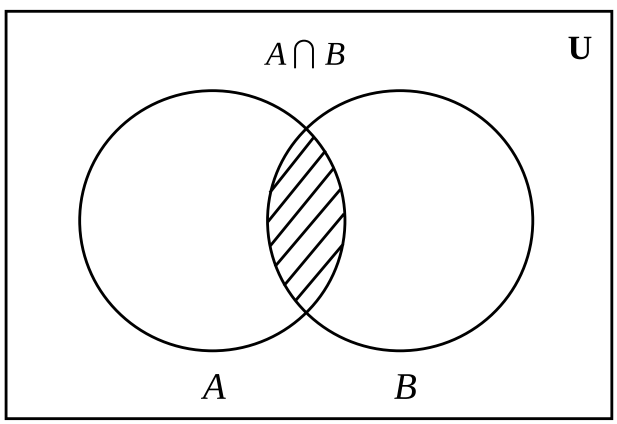


Ejemplo.
$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$
$B = \{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano\}$
$A \cup B = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía, durazno, melón, plátano\}$

- La *intersección* de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos de A que también pertenecen a B y se denota como $A \cap B$. Esto es:

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \quad y \quad x \in B \,\}$$

Gráficamente:



Ejemplo.
$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$
$B = \{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano\}$
$A \cap B = \{uva, naranja, sandía\}$

Dos conjuntos son *ajenos* o *disjuntos* cuando su intersección es el conjunto vacío, es decir, que no tienen nada en común. Por ejemplo:

$A=\{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

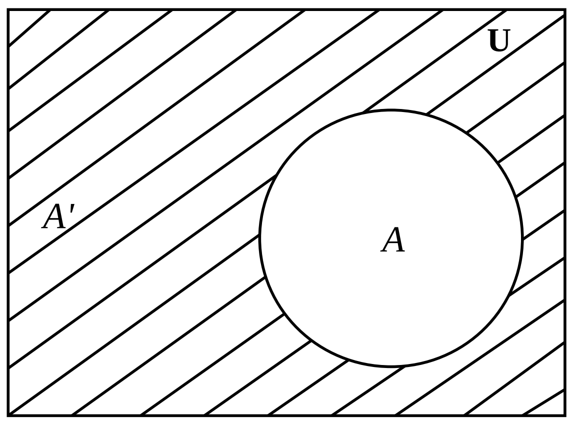
$E=\{limón, fresa, pera, mandarina, cereza\}$

$A\cap E=\phi$

- El *complemento* del conjunto A con respecto al conjunto universal U es el conjunto de todos los elementos de U que no están en A y se denota como A'. Esto es:

$$A'=\{\, x\in U \mid x\notin A \,\}$$

Gráficamente:



Ejemplo.

$U=\{mango, kiwi, ciruela, uva, pera, naranja, cereza, manzana, sandía, durazno, limón, melón, plátano\}$

$A=\{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

$A'=\{kiwi, pera, cereza, durazno, limón, melón, plátano\}$

En este ejemplo se puede notar como $\eta(A)+\eta(A')=\eta(U)$

De esta definición, se puede advertir que se cumplen las siguientes expresiones:

$(A')'=A$

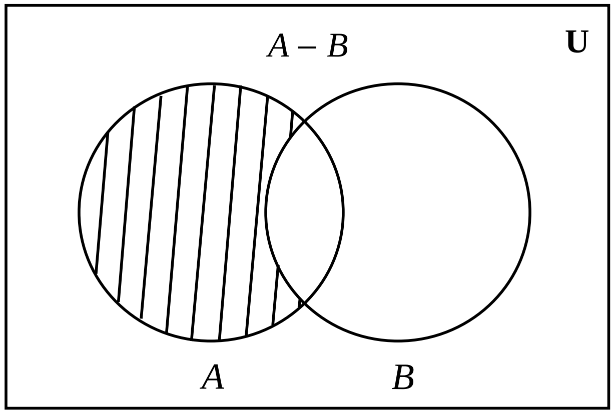
$\phi'=U$

$U'=\phi$

- La *diferencia* de los conjuntos A y B (en ese orden) es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B y se denota como $A-B$. Esto es:

$$A-B=\{\, x \mid x\in A \quad y \quad x\notin B \,\}$$

Gráficamente:



Ejemplo.

$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

$B = \{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano\}$

$A - B = \{mango, ciruela, manzana\}$

$B - A = \{durazno, melón, plátano\}$

Se puede advertir como $A - B \neq B - A$.

Del diagrama de Venn anterior se deducen las siguientes expresiones:

$A - B = A \cap B'$

$A - B = \phi, \quad sí \ y \ sólo \ sí: A \subset B$

$A - B = B - A, \quad sí \ y \ sólo \ sí: A = B$

$A - B = A, \quad sí \ y \ sólo \ sí: A \cap B = \phi$

$(A - B) \subset A$

$A - \phi = A$

$A - B = B' - A'$

Los conjuntos $A - B,\ A \cap B,\ B - A$ son mutuamente ajenos (su intersección es el conjunto vacío).

Ejemplo.

Sean los conjuntos:

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$

$A = \{a, d, e, g, h, k, l, n\}$

$B = \{a, c, f, g, k, l, m\}$

Obtener:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) A'

d) B' e) $A - B$ f) $B - A$

g) $A' \cup B$ h) $A \cap B'$ i) $A' \cap B'$

j) $A' - B'$ k) $(A \cup B)'$ l) $(A \cap B)'$

Solución.

a) $A \cup B = \{a, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n\}$

b) $A \cap B = \{a, g, k, l\}$

c) $A' = \{b, c, f, i, j, m\}$

d) $B' = \{b, d, e, h, i, j, n\}$

e) $A - B = \{d, e, h, n\}$

f) $B - A = \{c, f, m\}$

g) $A' \cup B = \{a, b, c, f, g, i, j, k, l, m\}$

h) $A \cap B' = \{d, e, h, n\}$

i) $A' \cap B' = \{b, i, j\}$

j) $A' - B' = \{c, f, m\}$

k) $(A \cup B)' = \{b, i, j\}$

l) $(A \cap B)' = \{b, c, d, e, f, h, i, j, m, n\}$

De acuerdo con las definiciones de unión, complemento y diferencia, se puede establecer que sus respectivas cardinalidades se pueden obtener a través de:

$$\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B)$$
$$\eta(A') = \eta(U) - \eta(A)$$
$$\eta(A - B) = \eta(A) - \eta(A \cap B)$$

Ejemplo.

En una unidad habitacional viven 120 familias y se sabe que 70 de ellas tienen automóvil, que 30 poseen un reproductor de DVD y que 17 tienen ambas cosas. Se desea conocer: a) ¿cuántas familias tienen exclusivamente automóvil?, b) cuántas familias son dueños exclusivamente de un reproductor DVD, c) ¿cuántas familias son propietarias de un automóvil o de un reproductor DVD?, y d) ¿cuántas familias no poseen ni automóvil ni reproductor DVD?

Solución.

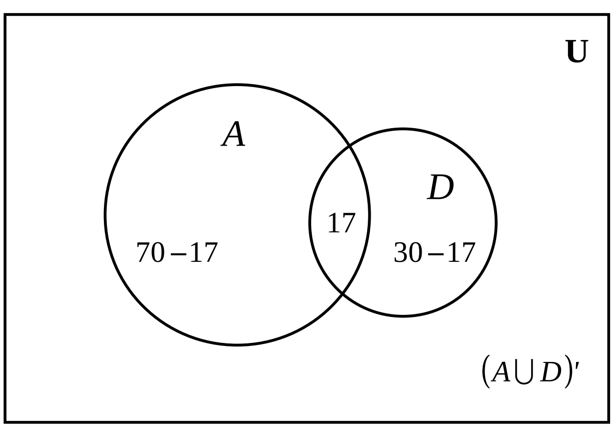
Identificando los datos por su cardinalidad:

Número de familias del conjunto universal, $\eta(U) = 120$

Número de familias con automóvil, $\eta(A) = 70$

Número de familias con reproductor DVD, $\eta(D) = 30$

Número de familias con automóvil y con reproductor DVD, $\eta(A \cap D) = 17$



Del diagrama en donde se muestran el número de elementos de los conjuntos se aprecia que:

a) El número de familias que exclusivamente tienen automóvil es:
$\eta(A)-\eta(A\cap D)=70-17=53$
b) El número de familias que son dueños exclusivamente de un reproductor DVD es:
$\eta(D)-\eta(A\cap D)=30-17=13$
c) El número de familias que son propietarias de un automóvil o de un reproductor DVD es: $\eta(A\cup B)$, así que: $\eta(A\cup D)=\eta(A)+\eta(D)-\eta(A\cap D)=70+30-17=83$
d) El número de familias que no poseen ni un automóvil ni un reproductor DVD es: $\eta(A\cup B)'$, por lo que:
$\eta(A\cup D)'=\eta(U)-\eta(A\cup D)=120-83=37$

I.4 PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS

Sean los conjuntos A,B,C dentro del universo U. Las seis propiedades que rigen las operaciones con esos conjuntos son las siguientes:

1. Propiedades de identidad:

$$A\cup\phi=A$$
$$A\cup U=U$$
$$A\cap U=A$$
$$A\cap\phi=\phi$$

2. Propiedades de idempotencia:

$$A\cup A=A$$
$$A\cap A=A$$

3. Propiedades de complemento:

$$A\cup A'=U$$
$$A\cap A'=\phi$$

4. Propiedades asociativas:

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

5. Propiedades conmutativas

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

6. Propiedades distributivas

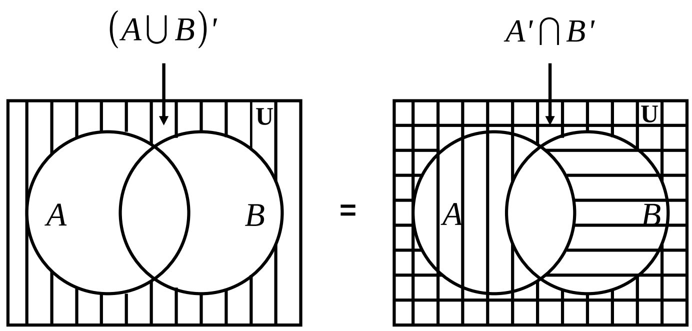
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

I.5 LEYES DE D'MORGAN

Estas leyes establecen los complementos de la unión e intersección entre conjuntos:

Primera ley. El complemento de la unión de dos conjuntos es la intersección de sus complementos.

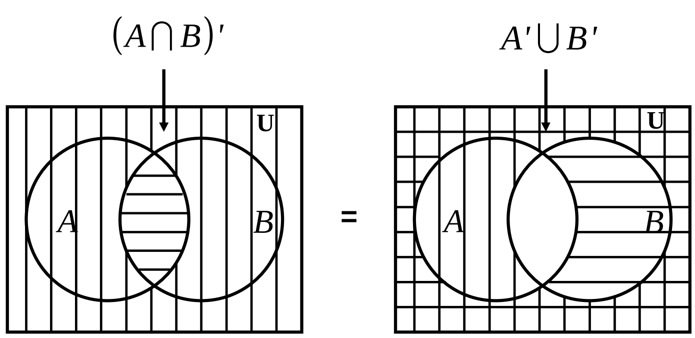
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$



En el diagrama de la izquierda, $A \cup B$ viene dada por la región en blanco y $(A \cup B)'$ está representado por el área sombreada verticalmente. Por su parte en el diagrama de la derecha, A' es la región sombreada horizontalmente, B' es el área sombreada verticalmente, por lo que $A' \cap B'$ está representado por la superficie cuadriculada. Las regiones resultantes son iguales.

Segunda ley. El complemento de la intersección de dos conjuntos es la unión de sus complementos:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$



En el diagrama de la izquierda, $A \cap B$ está dada por la región sombreada horizontalmente y $(A \cap B)'$ está representado por el área sombreada verticalmente. Por su parte, en el diagrama de la derecha, A' es la región sombreada horizontalmente, B' es el área sombreada verticalmente, por lo que $A' \cup B'$ está representado por la superficie que no es blanca. Las regiones resultantes son iguales.

Ejemplo.
Dados los siguientes conjuntos:
$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
$A = \{1,3,4,7,9,11\}$
$B = \{1,2,5,7,9,11,12\}$
Comprobar las leyes de D'Morgan:

Solución.
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9,11,12\}$
$A \cap B = \{1,7,9,11\}$
$A' = \{2,5,6,8,10,12\}$
$B' = \{3,4,6,8,10\}$
$(A \cup B)' = \{6,8,10\} \qquad \_(1)$
$A' \cap B' = \{6,8,10\} \qquad \_(2)$
Como $(1) = (2) \quad \Rightarrow \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$
$(A \cap B)' = \{2,3,4,5,6,8,10,12\} \qquad \_(3)$
$A' \cup B' = \{2,3,4,5,6,8,10,12\} \qquad \_(4)$
Como $(3) = (4) \quad \Rightarrow \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

I.6 PRODUCTO CARTESIANO DE DOS CONJUNTOS Y SU GRÁFICA

Uno de los principios básicos para hacer un análisis matemático es el concepto de *parejas ordenadas*: dos objetos, personas, símbolos o cosas mencionados en un orden definido por su posición, es decir, primero uno y luego el otro. Si este orden cambiara, es decir, primero el otro y luego el uno, se tendrá como resultado una nueva pareja ordenada y diferente a la inicialmente considerada.

La simbología matemática que se utiliza para representar una pareja ordenada es escribir dentro de un paréntesis, la primera componente separada por una coma de la segunda componente, por ejemplo: (x, y) es la pareja ordenada, en donde x es la primera componente y y es la segunda componente.

El *producto cartesiano* de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los posibles pares ordenados que se forman eligiendo como primera componente a un elemento que pertenezca a A, y como segunda componente a un elemento que pertenezca a B.

El producto cartesiano se denota de la siguiente forma: $A \times B$ y se lee "A cruz B".

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \ \text{ y } \ y \in B \}$$

La definición anterior expresa que el producto cartesiano de los conjuntos A y B, son la parejas ordenadas (x, y) tal que x pertenece al conjunto A y y pertenece al conjunto B.

Ejemplo.
Obtener el producto cartesiano $A\times B$ de los siguientes conjuntos:
$A=\{1,2,3\}$
$B=\{2,4,6,7\}$
Solución.
$A\times B=\{(1,2),(1,4),(1,6),(1,7),(2,2),(2,4),(2,6),(2,7),(3,2),(3,4),(3,6),(3,7)\}$

El número de parejas ordenadas que resultan de un producto cartesiano se obtiene multiplicando sus cardinalidades. En el ejemplo anterior, $\eta(A)=3$ y $\eta(B)=4$, el número de parejas ordenadas es: $(3)(4)=12$.

El producto cartesiano no es conmutativo. Esto significa que $A\times B\neq B\times A$, a menos que $A=B$.

Ejemplo.
Obtener el producto cartesiano $B\times A$ dados los mismos conjuntos anteriores:
$A=\{1,2,3\}$
$B=\{2,4,6,7\}$
Solución.
$B\times A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3),(6,1),(6,2),(6,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$
$A\times B\neq B\times A$

Ejemplo.
Dados los siguientes conjuntos:
$P=\{mango, uva, sandía\}$
$Q=\{melón, piña, ciruela, tuna, limón\}$
obtener los productos cartesianos $P\times Q$ y $Q\times P$.
Solución.

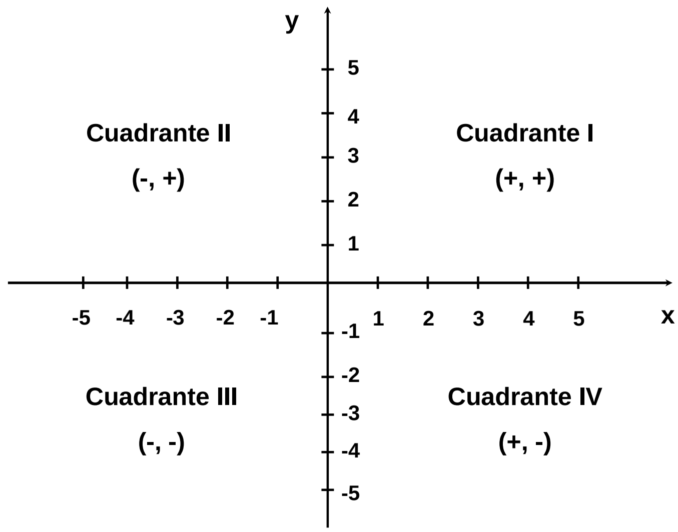
$$
\begin{aligned}
P\times Q=\{&(mango, melón),(mango, piña),(mango, ciruela),(mango, tuna),(mango, limón),\\
&(uva, melón),(uva, piña),(uva, ciruela),(uva, tuna),(uva, limón),\\
&(sandía, melón),(sandía, piña),(sandía, ciruela),(sandía, tuna),(sandía, limón)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q\times P=\{&(melón, mango),(melón, uva),(melón, sandía),\\
&(piña, mango),(piña, uva),(piña, sandía),\\
&(ciruela, mango),(ciruela, uva),(ciruela, sandía),\\
&(tuna, mango),(tuna, uva),(tuna, sandía),\\
&(limón, mango),(limón, uva),(limón, sandía)\}
\end{aligned}
$$

Un *sistema de dos ejes coordenados* o *plano cartesiano,* se define como el conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales, que corresponden en sí al producto cartesiano **R** x **R**.

Un sistema de ejes coordenados se construye haciendo que dos líneas rectas se corten perpendicularmente en un punto llamado *origen*, quedando el plano dividido en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*. Al eje horizontal se le conoce como eje x y al eje vertical como eje y.

Esto se representa de la siguiente forma:



Dado que el conjunto **R** x **R** son todas las parejas ordenadas (x,y) de un plano cartesiano, se tiene que:

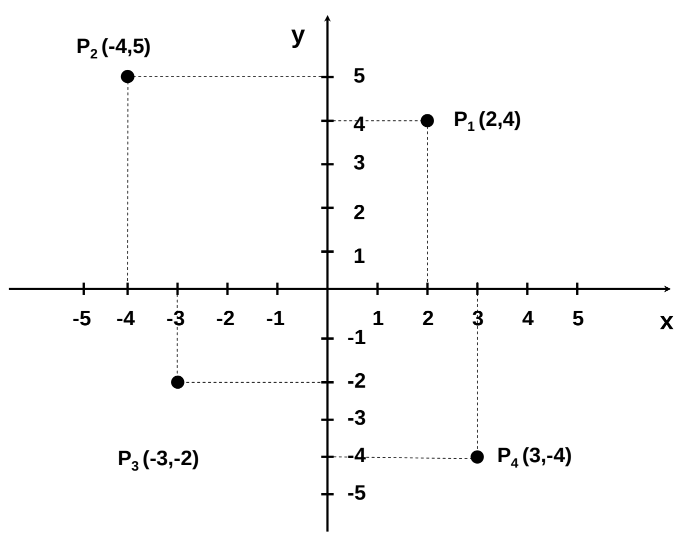
$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \left\{ (x,y) \mid x \in \mathbf{R} \text{ y } y \in \mathbf{R} \right\}$$

En una pareja ordenada (x,y), a x se le da el nombre de *abscisa* y a y, el nombre de *ordenada*. Estos valores sirven para localizar un punto en el plano cartesiano, y se les llama *coordenadas* de un punto, que se escribe como $P(x,y)$.

A cada pareja ordenada de este producto cartesiano le corresponde uno y sólo un punto sobre el plano cartesiano, y a cada punto del plano cartesiano le corresponde una y sólo una pareja ordenada. A esto se le llama correspondencia *biunívoca*.

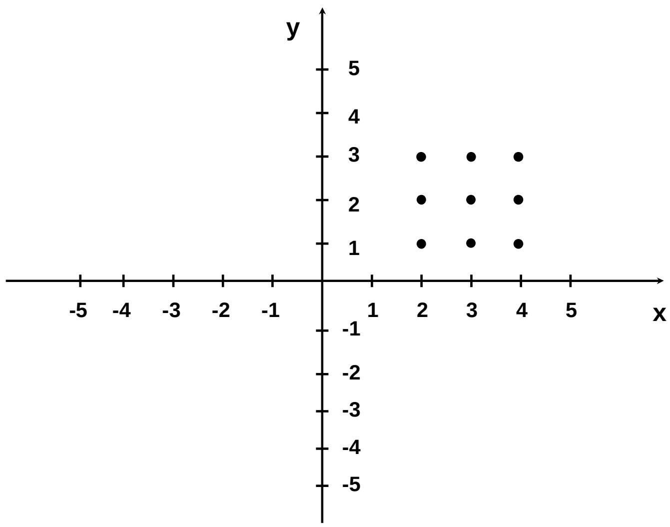
Ejemplo.

Ubicar en el plano cartesiano los siguientes puntos: $P_1(2,4)$, $P_2(-4,5)$, $P_3(-3,-2)$, $P_4(3,-4)$



Ejemplo.
Dados los conjuntos $A=\{2,3,4\}$ y $B=\{1,2,3\}$, obtener la gráfica del producto cartesiano $A\times B$

Solución.
El conjunto solución a este producto cartesiano son nueve puntos discretos formado por las parejas ordenadas: $A\times B=\{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$. Gráficamente esto es:



Ejemplo.
Sean los conjuntos $A=\{x \mid 2\le x\le 4,\quad x\in \mathbf{R}\}$ y $B=\{y \mid 2\le x\le 5,\quad y\in \mathbf{R}\}$, graficar el producto cartesiano $A\times B$

El conjunto solución a este producto cartesiano es una superficie plana de forma rectangular limitada tanto en x como en y. Gráficamente esto es: