EL CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES

UNIDAD III

III.1 NÚMEROS NATURALES

Los números naturales son aquellos que sirven para designar la cantidad de elementos que posee un cierto conjunto[1]. Se representan como $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{\, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots \,\}$$

Los números naturales son infinitos, pues para cada uno de ellos hay otro distinto que le sucede y que no le precede.

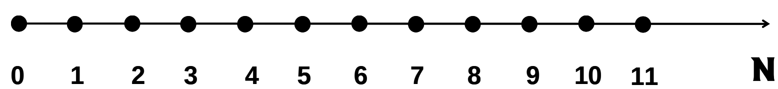
Se habla del *orden* en estos números a través de su propiedad de *tricotomía* afirmando que dados n y m dos números naturales, entonces se tiene exactamente una de las tres posibilidades:

$$n < m$$

$$n = m$$

$$n > m$$

Gráficamente, este conjunto se puede representar mediante una recta numérica en donde los números son los puntos:



Una operación en $\mathbf{N}$ es una manera de asociar a cada par de números naturales, otro número natural bien determinado. Las operaciones que se definen en este conjunto son la suma y la multiplicación.

Sean a, b y c tres números naturales cualesquiera. Las propiedades básicas de las operaciones definidas en $\mathbf{N}$ son:

1. Cerradura:

$a + b \in \mathbf{N}$

$a \cdot b \in \mathbf{N}$

2. Asociatividad:

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

---

[1] Existen autores que definen al conjunto de los números naturales como aquellos que sirven para contar, por lo que inician en el uno. Si incluyen al cero lo definen como conjunto de *números naturales ampliados* o como *números completos*.

3. Conmutatividad:
$a+b=b+a$
$a\cdot b=b\cdot a$

4. Elementos neutros
Para la suma es el cero ya que: $a+0=a$
Para el producto es el uno ya que: $a\cdot 1=a$

5. Distributividad
La propiedad distributiva del producto sobre la suma es: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Ejemplo.
Dados los números 2, 3 y 5, comprobar las propiedades de la suma y del producto.

Solución.
Cerradura:
$2+3=5\in \mathbf{N}$
$2\cdot 5=10\in \mathbf{N}$
Asociatividad:
$2+(3+5)=(2+3)+5=10$
$2\cdot(3\cdot 5)=(2\cdot 3)\cdot 5=30$
Conmutatividad:
$2+3=3+2=5$
$2\cdot 3=3\cdot 2=6$
Los elementos neutros:
Para la suma es el cero ya que: $2+0=2$
Para el producto es el uno ya que: $2\cdot 1=2$
Distributividad
del producto sobre la suma es: $2\cdot(3+5)=2\cdot 3+2\cdot 5=16$

Un número es *múltiplo* de otro si se obtiene multiplicando este último por un número natural. Por ejemplo el número 10 es múltiplo del 5 ya que $10=(2)(5)$.

Las propiedades de los múltiplos son:

- El cero es múltiplo de cualquier número
- Un número siempre es múltiplo de si mismo
- La suma de múltiplos de un número también es un múltiplo de este número
- El producto de múltiplos de un número también es múltiplo de este número
- Si un número es múltiplo de otro y este lo es de un tercero, el primero es múltiplo del tercero.

Ejemplos.
El número 0 es múltiplo del 6 ya que $0=(0)(6)$
El número 7 es múltiplo del 7 ya que $7=(1)(7)$
El número 18 es múltiplo del 3 ya que $18=(3)(6)$ y el número 12 también es múltiplo del 3 ya que $12=(3)(4)$, por lo tanto, el número $30=18+12$ es múltiplo del 3 ya que $30=(3)(10)$
El número 6 es múltiplo del 2 ya que $6=(2)(3)$ y el número 8 también es múltiplo del 2 ya que $8=(2)(4)$, por lo tanto, el número $48=(6)(8)$ es múltiplo del 2 ya que $48=(2)(24)$

El número 20 es múltiplo del 10 ya que $20=(10)(2)$, pero a su vez el número 10 es múltiplo del 5 ya que $10=(5)(2)$, por lo tanto, el número 20 es múltiplo del 5 ya que $20=(5)(4)$

Un número natural es *divisor* de otro si cuando se divide el primero entre el segundo el residuo es cero, es decir, si la división es exacta. Por ejemplo el número 2 es divisor del 6 ya que $\frac{6}{2}=3$.

Las propiedades de los divisores son:

- El número uno es divisor de cualquier número
- Un número siempre es divisor de si mismo
- Si un número es divisor de otro, y éste lo es de un tercero, el primero es divisor del tercero.

Ejemplos.
El número 1 es divisor del 5 ya que $\frac{5}{1}=5$

El número 11 es divisor del 11 ya que $\frac{11}{11}=1$

El número 6 es divisor del 12 ya que $\frac{12}{6}=2$ y el número 3 es divisor del 6 ya que $\frac{6}{3}=2$, por lo tanto, el número 3 es divisor del 12 ya que $\frac{12}{3}=4$

Cuando los números son grandes hay reglas que permiten reconocer directamente que un número es divisible por otro. Estas reglas se conocen como *criterios de divisibilidad* y los más comunes son:

- Un número es divisible por 2 si termina en cero o en cifra par.
- Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras absolutas es múltiplo de tres.
- Un número es divisible por 4 si en las dos últimas cifras, hay dos ceros o un número múltiplo de cuatro.
- Un número es divisible por 5 cuando acaba en cero o en cinco.
- Un número es divisible por 6 si es divisible por dos y por tres.
- Un número es divisible por 7 si su cifra más significativa menos dos veces su siguiente cifra más cuatro veces su siguiente cifra y así sucesivamente es cero o múltiplo de siete.
- Un número es divisible por 8 cuando sus tres últimas cifras son ceros o son múltiplo de ocho.
- Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de nueve.
- Un número es divisible por 10 si termina en cero.
- Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras pares y las impares es múltiplo de once o cero.
- Un número es divisible por 12 cuando divisible por tres y por cuatro.

Ejemplo.
Aplicando los criterios anteriores, determinar la divisibilidad del número 720

Solución:
a) Al terminar en cifra par, 720 es divisible por 2
b) $7+2+0=9$ que es múltiplo de 3, así que es divisible por 3
c) las dos últimas cifras son 20 que es múltiplo de 4, así que es divisible por 4
d) al terminar en cero, 720 es divisible por 5
e) al ser divisible por 2 y por 3, es divisible por 6

f) $7+2+0=9$ que es múltiplo de 9, así que es divisible por 9
g) al terminar en cero, 720 es divisible por 10

Los criterios de divisibilidad permiten encontrar con rapidez divisores de un número. Algunos números como el siete, trece o el diecinueve solo tienen dos divisores: la unidad y el mismo. Estos números se llaman números *primos* y se denotan como **P**.

$$\mathbf{P}=\{\,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,\cdots\,\}$$

Los números que no son primos se llaman números *compuestos*.

Descomponer un número en factores primos es expresarlo como producto de números primos. En la práctica, para descomponer un número en factores primos se divide sucesivamente por los números primos comenzando por el primer número primo hasta que se encuentre un cociente que sea igual a uno.
Ejemplo.
Descomponer el número 180 en factores primos.

Solución.

$180|2=90 \qquad 2$

$90|2=45 \qquad 2$

$45|3=15 \qquad 3$

$15|3=5 \qquad 3$

$5|5=1 \qquad 5$

Por lo que $180=(2)(2)(3)(3)(5)=(2^2)(3^2)(5)$

Para calcular todos los divisores de un número, se realiza la descomposición factorial del número, después se determinan los divisores de cada uno de los factores y finalmente se construye un esquema con todos los productos posibles.

Ejemplo.
Calcular todos los divisores del número 60.

Solución.

$60|2=30 \qquad 2$

$30|2=15 \qquad 2$

$15|3=5 \qquad 3$

$5|5=1 \qquad 5$

Por lo que $60=(2)(2)(3)(5)=(2^2)(3)(5)=(3)(4)(5)$

Los divisores del 3 son: $1,3$

Los divisores del 4 son: $1,2,4$

Los divisores del 5 son: $1,5$

Efectuando todas las combinaciones posibles de productos, se tiene:

$(1)(1)(1)=1$

$(1)(1)(5)=5$

$(1)(2)(1)=2$
$(1)(2)(5)=10$
$(1)(4)(1)=4$
$(1)(4)(5)=20$
$(3)(1)(1)=3$
$(3)(1)(5)=15$
$(3)(2)(1)=6$
$(3)(2)(5)=30$
$(3)(4)(1)=12$
$(3)(4)(5)=60$

Por lo tanto, los divisores del 60, puestos en orden, son: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$

El mínimo común múltiplo de dos o más números, es el número más pequeño posible, que es múltiplo de esos números.

Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de los números 100, 200, 300, es 600, puesto que es el número más pequeño que es múltiplo de 100, 200 y 300.

Para calcular el mínimo común múltiplo de dos o más números se descomponen los números en factores primos:

$100=(2^2)(5^2)$
$200=(2^3)(5^2)$
$300=(2^2)(3)(5^2)$

y se toman los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, en este caso:

$(2^3)(3)(5^2)=600$

La sustracción es una operación que no es cerrada en **N**, pues la diferencia de dos números naturales puede no ser un número natural (no lo es cuando el sustraendo es mayor que el minuendo). Por eso se necesita definir otro conjunto de números en el que se puede restar un número de otro, cualesquiera que sean éstos.

III.2 NÚMEROS ENTEROS

Los números enteros, representados por **Z** son aquellos que surgen de la resta de dos números naturales[2].

$$\mathbf{Z}=\{\ x \mid x=a-b, \quad a,b\in \mathbf{N}\ \}$$

Este conjunto es una extensión de los números naturales ya que incluye a sus opuestos, es decir aparecen los números negativos.

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots\}$$

[2] Se utiliza esta letra porque es la letra inicial de la palabra de origen alemán *Zahlen*, que significa número.

Ejemplo.
Cuando en épocas muy frías la temperatura está por debajo de cero, implícitamente se habla de un número entero, tal es el caso de -1°C.

La razón principal para introducir los números negativos sobre los números naturales es la posibilidad de resolver ecuaciones del tipo: $a = x + b$, para la incógnita x .

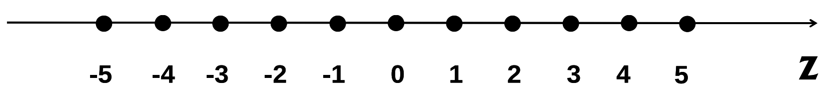
Se habla del *orden* en estos números a través de su propiedad de *tricotomía* afirmando que dados n y m dos números enteros, entonces se tiene exactamente una de las tres posibilidades:

$$n < m$$

$$n = m$$

$$n > m$$

Esto significa que es un conjunto completamente ordenado sin cota superior o inferior y gráficamente, también se puede representar mediante una recta numérica en donde los números son los puntos:



Una operación en **Z** es una manera de asociar a cada par de números enteros, otro número entero bien determinado. Las operaciones que se definen en este conjunto son la suma y la multiplicación (la resta se considera como la suma de números de diferente signo).

Sean a , b y c tres números enteros cualesquiera. Las propiedades básicas para la suma y el producto en **Z** son:

1. Cerradura:
$a + b \in \mathbf{Z}$
$a \cdot b \in \mathbf{Z}$
2. Asociatividad:
$a + (b + c) = (a + b) + c$
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. Conmutatividad:
$a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$
4. Elementos neutros
Para la suma es el cero ya que: $a + 0 = a$
Para el producto es el uno ya que: $a \cdot 1 = a$
5. Inverso aditivo:
Para la suma existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$
6. Distributividad
La propiedad distributiva del producto sobre la suma es: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Nótese como no existe un inverso multiplicativo. Además, la división no es una operación cerrada en $\mathbf{Z}$, pues el cociente de dos números naturales puede no ser un número entero (no lo es cuando el dividendo no es múltiplo del divisor). Por esa razón, es necesario el establecimiento de otro sistema numérico en el que se pueda dividir dos números.

III.3 NÚMEROS RACIONALES

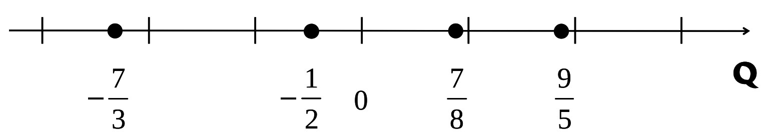
Número racional es el que se puede expresar como cociente de dos números enteros con divisor diferente de cero, es decir, en forma de fracción. Se representan por $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{Q}=\left\{ \; x \;\middle|\; x=\frac{a}{b}, \quad a,b\in \mathbf{Z}, \quad b\neq 0 \right\}$$

Los números racionales no enteros se llaman *fraccionarios* en donde a es el numerador y b el denominador[3]. Nótese como en esta definición, el denominador *nunca* puede ser cero porque la división por cero *no está definida*.

En el conjunto de los números enteros cada número tiene un siguiente (el siguiente al 3 es el 4, el siguiente al -6 es el -5, etc.), no pasa lo mismo con los racionales, pues entre cada dos números racionales existe al menos otro número racional (propiedad de densidad).

Los números racionales pueden ser ubicados también en la recta numérica mediante puntos, independientemente de que no presentan una secuencia determinada, por ejemplo:



Al expresar un número racional, no entero, puede tener alguna de las siguientes representaciones:

Números racionales
- Fracciones
- Números decimales
  - Exactos
  - Periódicos

Si la fracción es irreducible y en la descomposición factorial del denominador sólo se encuentran los factores 2 y 5, entonces la fracción es igual a un número decimal exacto, pero si en el denominador hay algún factor distinto de 2 o 5 la expresión decimal es periódica, por ejemplo:

[3] Los números enteros son racionales, pues se pueden expresar como cociente de ellos mismos por la unidad y en otros cocientes equivalentes como: $2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\cdots$

$\frac{9}{2} = 4.5$, se obtiene un decimal exacto

$\frac{12}{5} = 2.4$, se obtiene un decimal exacto

$\frac{11}{7} = 1.\underbrace{571428}\underbrace{571428}\underbrace{571428}\cdots$, se obtiene un expresión decimal periódica.

Dos fracciones son equivalentes cuando tienen el mismo valor decimal. Las fracciones equivalentes representan la misma parte de una cantidad.

Para convertir una fracción a un número decimal periódico, basta con efectuar la división.

Ejemplo.

Convertir el número $\frac{13}{11}$ a decimal.

Solución.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1.1818\cdots \\
11 & 13 \\
 & \ \ 20 \\
 & \ \ \ \ 90 \\
 & \ \ \ \ \ \ 20 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ 90
\end{array}
$$

$\therefore \quad \frac{13}{11} = 1.18181818\cdots$

Para convertir un número decimal periódico a fracción, se emplea el siguiente procedimiento:

- Se iguala a x el número decimal.
- Se identifican las posiciones en donde inicia y termina el primer ciclo de periodicidad
- Se multiplica por 10^n a la expresión, donde n es el número de posiciones después del punto decimal en donde termina el ciclo.
- Se multiplica por 10^m a la expresión, donde m es el número de posiciones después del punto decimal en donde inicia el ciclo.
- Se resta la segunda expresión a la primera
- Se despeja x y se simplifica la fracción de ser posible.

Ejemplos.

1) Convertir el número $3.72222\cdots$ a fraccionario

Solución.

$x = 3.72222\cdots$

La periodicidad termina después de dos cifras después del punto decimal, así que se multiplica por $10^2 = 100$. Por su parte la periodicidad inicia después de una cifra a la derecha del punto, así que se multiplica por $10^1 = 10$. Esto es:

$100x = 372.222\cdots$

$10x = 37.2222\cdots$

se resta la segunda expresión a la primera para eliminar la parte decimal:

$$\begin{aligned} 100x &= \ \ 372.222\cdots \\ -10x &= -\ \ 37.2222\cdots \\ \hline 90x &= \ \ 335 \end{aligned}$$

despejando x y simplificando se tiene: $x = \frac{335}{90} = \frac{67}{18}$

$\therefore \quad \frac{67}{18} = 3.72222\cdots$

2) Convertir el número $2.346346346\cdots$ a fraccionario

Solución.

$x = 2.346346346\cdots$

La periodicidad termina después de tres cifras a la derecha del punto decimal, así que se multiplica por $10^3 = 1{,}000$. Por su parte la periodicidad inicia inmediatamente después del punto, así que se multiplica por $10^0 = 1$. Esto es:

$1{,}000x = 2{,}346.346346\cdots$

$1x = 2.346346346\cdots$

se resta la segunda expresión a la primera para eliminar la parte decimal:

$$\begin{aligned} 1{,}000x &= \ \ 2{,}346.346346\cdots \\ -\ \ 1x &= -\ \ 2.346346346\cdots \\ \hline 999x &= \ \ 2{,}344 \end{aligned}$$

despejando x se tiene: $x = \frac{2{,}344}{999}$

$\therefore \quad \frac{2{,}344}{999} = 2.346346346\cdots$

Simplificar una fracción es sustituirla por la fracción equivalente cuyo denominador es el menor posible.

Ejemplo.

Simplificar $\frac{48}{90}$

Solución.

$48|2 = 24 \qquad 2$

$24|2 = 12 \qquad 2$

$12|2 = 6 \qquad 2$

$6|2 = 3 \qquad 2$

$3|3 = 1 \qquad 3$

$\therefore \quad 48 = (2)(2)(2)(2)(3)$

$90|2 = 45 \qquad 2$

$45|3 = 15 \qquad 3$

$15|3 = 5 \qquad 3$

$5|5 = 1 \qquad 5$

$\therefore \quad 90 = (2)(3)(3)(5)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{48}{90} = \dfrac{(2)(2)(2)(2)(3)}{(2)(3)(3)(5)} = \dfrac{(2)(2)(2)}{(3)(5)} = \dfrac{8}{15}$

En las fracciones se cumple que: $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$, aunque por convención se utiliza $-\dfrac{a}{b}$

El orden en **Q** establece que un número es menor que otro, si está colocado a la izquierda de él en la recta numérica; y es mayor, cuando está a su derecha. Para comparar dos fracciones se considera que:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \qquad \Leftrightarrow \qquad ad > bc$$

Ejemplo.

Dadas las fracciones $-\dfrac{8}{5}$ y $-\dfrac{9}{4}$, determinar cuál es más grande.

Solución.

$(-8)(4) = -32$ y $(5)(-9) = -45$, como $-32 > -45$, se cumple que $-\dfrac{8}{5} > -\dfrac{9}{4}$

Una operación en **Q** es una manera de asociar a cada par de números racionales, otro número racional bien determinado. Las operaciones que se definen en este conjunto son la suma y la multiplicación (la resta se considera como la suma de números de diferente signo y la división como la multiplicación de un número por el recíproco de otro, siempre cuando el segundo no sea cero).

$\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd} = \dfrac{ad}{bd} \pm \dfrac{bc}{bd}$, donde bd es el mínimo común múltiplo de b y d

$\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ las fracciones antes de multiplicarse deben simplificarse

$\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$

Ejemplos.

$\dfrac{7}{3} + \dfrac{16}{9} = \dfrac{21+16}{9} = \dfrac{37}{9}$

$-\dfrac{4}{15} + \dfrac{2}{21} = \dfrac{-28+10}{105} = -\dfrac{18}{105} = -\dfrac{6}{35}$

$\left(-\dfrac{14}{8}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{6}\right) = \left(-\dfrac{7}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{7}{8}$

$$\frac{6}{9}\div\left(-\frac{4}{27}\right)=\frac{6}{9}\cdot\left(-\frac{27}{4}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{27}{4}\right)=\frac{2}{4}\cdot\left(-\frac{27}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot(-9)=-\frac{9}{2}$$

Sean a, b y c tres números racionales cualesquiera. Las propiedades básicas para la suma y el producto en **Q** son:

1. Cerradura:
$a+b\in$ **Q**
$a\cdot b\in$ **Q**
2. Asociatividad:
$a+(b+c)=(a+b)+c$
$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
3. Conmutatividad:
$a+b=b+a$
$a\cdot b=b\cdot a$
4. Elementos neutros
Para la suma es el cero ya que: $a+0=a$
Para el producto es el uno ya que: $a\cdot 1=a$
5. Inversos:
Para la suma existe $-a$, llamado opuesto o simétrico tal que $a+(-a)=0$
Para el producto existe $\frac{1}{a}$, $\quad a\neq 0$, llamado inverso multiplicativo o *recíproco* tal que $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$
6. Distributividad
La propiedad distributiva del producto sobre la suma es: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Ejemplo.

Dados los números $\frac{1}{2}$, $-\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{5}$, comprobar las propiedades de las operaciones de la suma y el producto en **Q**.

Solución.
Cerradura:

$$\frac{1}{2}+\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{7-8}{14}=-\frac{1}{14}\in \mathbf{Q}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{-4}{14}=-\frac{2}{7}\in \mathbf{Q}$$

Asociatividad:

$$\frac{1}{2}+\left(-\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\right)=\left[\frac{1}{2}+\left(-\frac{4}{7}\right)\right]+\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}+\left(-\frac{20}{35}+\frac{21}{35}\right)=\left[\frac{7}{14}+\left(-\frac{8}{14}\right)\right]+\frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{35}=-\frac{1}{14}+\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\frac{35}{70}+\frac{2}{70}=-\frac{5}{70}+\frac{42}{70}\quad\Rightarrow\quad\frac{37}{70}=\frac{37}{70}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)\right)\cdot\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{12}{35}\right)=\left(-\frac{4}{14}\right)\cdot\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad-\frac{12}{70}=-\frac{12}{70}\quad\Rightarrow\quad-\frac{6}{35}=-\frac{6}{35}$$

Conmutatividad:

$$\frac{1}{2}+\left(-\frac{4}{7}\right)=-\frac{4}{7}+\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{14}+\left(-\frac{8}{14}\right)=-\frac{8}{14}+\frac{7}{14} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{14}=-\frac{1}{14}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)=\left(-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{14}=-\frac{4}{14} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{7}=-\frac{2}{7}$$

Elementos neutros:

Para la suma es el cero ya que: $\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

Para el producto es el uno ya que: $\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

Inversos:

Para el $\frac{1}{2}$ su opuesto o simétrico es $-\frac{1}{2}$ ya que $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

Para el $\frac{1}{2}$ su inverso multiplicativo o recíproco es $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ya que $\frac{1}{2}\cdot(2)=1$

Distributividad del producto sobre la suma es:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{20}{35}+\frac{21}{35}\right)=-\frac{4}{14}+\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{35}\right)=-\frac{2}{7}+\frac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad =\frac{1}{70}=\frac{-20+21}{70} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{70}=\frac{1}{70}$$

En general, dado un número racional de la forma $\frac{a}{b}$, su recíproco viene dado por $\frac{b}{a}$.

Ejemplos.

El recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$

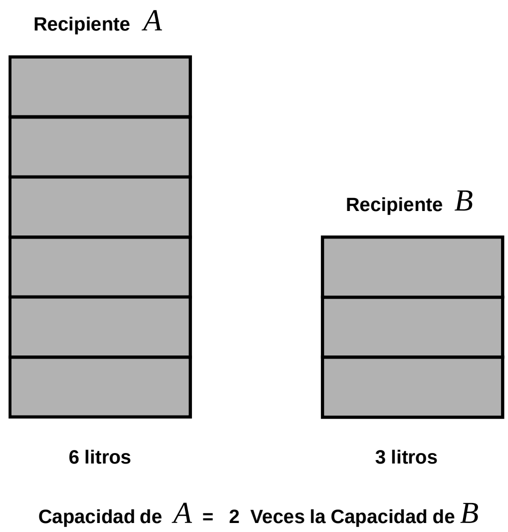
El recíproco de $-\frac{1}{5}$ es -5

El recíproco de 8 es $\frac{1}{8}$

Una *razón* es el resultado de comparar dos cantidades del mismo tipo, la primera de ellas llamada *antecedente* (a) y la segunda llamada *consecuente* (b). Estas cantidades se presentan en forma fraccionaria, de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} \quad \text{o} \quad a\div b \quad \text{o} \quad a:b \quad \text{con} \quad b\neq 0$$

Por ejemplo, un recipiente A tiene una capacidad de 6 litros y otro B tiene una capacidad de 3 litros. Si se compara la capacidad de A con la de B, la razón es de $\frac{6}{3}$, es decir 2, esto significa que A tiene el doble de capacidad de B. Gráficamente esto se puede ver en la siguiente figura:

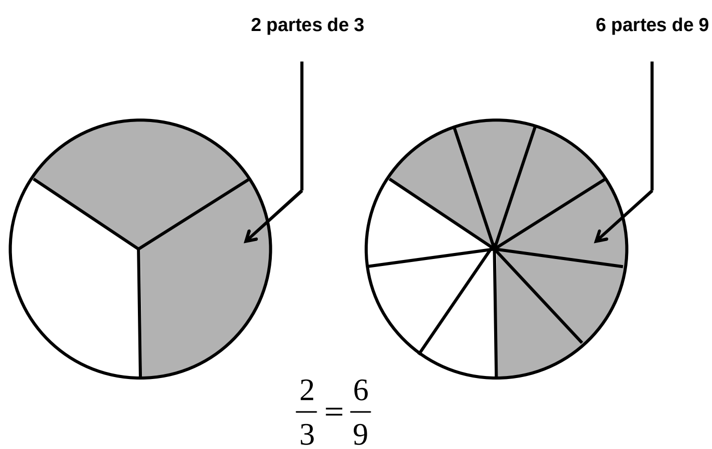


Una *proporción* es una proposición que establece que dos razones son iguales. Esto es:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad=bc \quad \text{con} \quad b\neq 0, \quad d\neq 0$$

y se lee: a lo es a b como c lo es a d .

Por ejemplo, las razones $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{9}$ son equivalentes ya que se cumple que $2(9)=3(6)=18$, por lo tanto, forman una proporción. Gráficamente esto es:



Las magnitudes proporcionales pueden ser de dos clases:

a) Magnitudes Directamente Proporcionales: Dadas dos cantidades el aumento de una corresponde al aumento de la otra o la disminución de una corresponde a la disminución de la otra.

Propiedad: si a y b son dos cantidades entonces:

$$\frac{a}{b} = constante \qquad \Leftrightarrow \qquad a \text{ y } b \text{ son directamente proporcionales}$$

Ejemplos.

1) Si se tiene la razón $\frac{4}{5}$ y se quiere formar una proporción directa se puede multiplicar por un mismo número tanto al antecedente como al consecuente, si ese número es 3 se obtiene $\frac{12}{15}$. Nótese como ambas cantidades aumentan.

2) Dada la razón $\frac{20}{24}$ y se quiere formar una proporción directa se puede dividir por un mismo número tanto al antecedente como al consecuente, si ese número es 4 se obtiene $\frac{5}{6}$. Nótese como ambas cantidades disminuyen.

b) Magnitudes *Inversamente Proporcionales*: Dadas dos cantidades el aumento de una corresponde a la disminución de la otra o la disminución de una corresponde al aumento de la otra.

Propiedad: si a y b son dos cantidades entonces:

$$a \cdot b = constante \qquad \Leftrightarrow \qquad a \text{ y } b \text{ son inversamente proporcionales}$$

Ejemplos.

1) Si se tiene la razón $\frac{2}{15}$ y se quiere formar una proporción inversa se puede multiplicar por un número al antecedente y dividir por ese mismo número al consecuente, si ese número es 5 se obtiene $\frac{10}{3}$. Nótese como una cantidad aumenta y la otra disminuye.

2) Dada la razón $\frac{4}{3}$ y se quiere formar una proporción inversa se puede dividir por un número al antecedente y multiplicar por ese mismo número al consecuente, si ese número es 2 se obtiene $\frac{2}{6}$. Nótese como una cantidad disminuye y otra aumenta.

Una *regla de tres directa* se forma con la igualdad de dos razones directamente proporcionales, en donde se conoce las dos cantidades de una razón y sólo una cantidad de otra razón. Si a lo es a b, como c lo es una cantidad desconocida x, se representa como:

$$\left.\begin{array}{ccc} a & \rightarrow & b \\ c & \rightarrow & x \end{array}\right\}$$

donde x viene dado por: $x = \frac{c \cdot b}{a}$

Ejemplo.
Si tres discos cuestan 150 pesos, ¿cuánto costarán siete discos?

Solución.

El problema expresado en forma de regla de tres directa es: $\left.\begin{matrix} 3 & \rightarrow & 150 \\ 7 & \rightarrow & x \end{matrix}\right\}$, entonces, los siete discos costarían $x=\frac{7(150)}{3}=350$ pesos.

Una *regla de tres inversa* se forma con la igualdad de dos razones inversamente proporcionales, en donde se conoce las dos cantidades de una razón y sólo una cantidad de otra razón. Si a lo es a b, como c lo es una cantidad desconocida x, se representa como:

$$\left.\begin{matrix} a & \rightarrow & b \\ c & \rightarrow & x \end{matrix}\right\}$$

donde x viene dado por: $x=\frac{a\cdot b}{c}$

Ejemplo.
Si cuatro albañiles hacen una casa en noventa días, ¿cuánto tiempo tardarían seis albañiles?

Solución.

El problema expresado en forma de regla de tres inversa es: $\left.\begin{matrix} 4 & \rightarrow & 90 \\ 6 & \rightarrow & x \end{matrix}\right\}$, entonces, los seis trabajadores tardarían $x=\frac{4(90)}{6}=60$ días.

Como se ha dicho, en el conjunto de los números racionales se pueden efectuar las cuatro operaciones básicas, no obstante, no se puede resolver de forma general un problema donde intervenga la radicación de un número entero, por lo tanto, es necesario definir un nuevo sistema numérico.

III.4 NÚMEROS IRRACIONALES

Con los números racionales se pueden representar casi todas las cantidades que se encuentran en la vida cotidiana. Sin embargo, hay otra clase de números, que se escriben con una infinidad de decimales pero que no tienen un período, es decir, no tienen cifras que se repitan en el mismo orden. Los números de esta clase reciben el nombre de *irracionales* y, a diferencia de los racionales, no pueden expresarse en forma de fracción, sino sólo en forma decimal. Se denotan por **Q'**.

En general, cualquier raíz inexacta de un número racional o alguna combinación algebraica que la involucre (y que exista) es un número irracional. Esto significa que este conjunto también es infinito.

Ejemplos de números irracionales.

$\sqrt{3}=1.7320508075\cdots$

$\sqrt[6]{793}=3.0423711763\cdots$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\cdots$ (este número es llamado áureo[4])

Nótese como estos números tienen una infinidad de cifras y no tienen periodicidad. Para todo fin práctico, cuando se trabaja con números irracionales se efectúan aproximaciones, o bien, se utilizan algunos símbolos especiales.

Ejemplo.

El número π es un irracional que representa las veces que cabe el diámetro de una circunferencia en su perímetro P. Es decir, si se tuvieran las medidas exactas del perímetro P de una circunferencia y de su diámetro, D, π viene dado por $\frac{P}{D}$. Si se quisiera efectuar la división nunca se terminaría ya que se podrían obtener tantas cifras decimales como se quisiera, pero nunca se llegaría a un residuo igual a cero, ni se encontrarían cifras que formen un período. Por lo tanto, no se puede escribir exactamente π en cifras decimales:

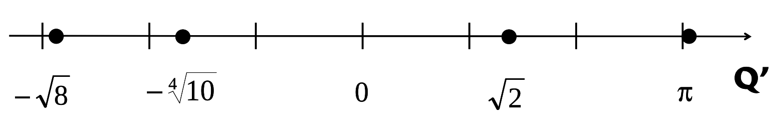
$$\pi = 3.1415926535\,897932\cdots$$

Los puntos suspensivos indican que las cifras son infinitas. En la práctica, sin embargo, cuando se requiere calcular perímetros o áreas de circunferencias, volúmenes de esferas o para hacer cualquier otro cálculo, en el que aparezca π, se usa la aproximación $\pi = 3.1416$.

Ejemplo.

$\sqrt{2}$ es otro número irracional, ya que es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden una unidad de longitud. Normalmente se aproxima a 1.4142, aunque su valor es de: $\sqrt{2} = 1.4142135623\cdots$

Un número irracional tiene un número ilimitado de cifras, por tanto, es imposible escribir su valor exacto. Para manejar estos números se utilizan aproximaciones de los mismos. Aumentando el número de cifras, el error va disminuyendo, de modo que puede ser tan pequeño como se quiera. Algunos números irracionales se pueden representar en la recta numérica mediante procedimientos geométricos utilizando regla y compás (por ejemplo las raíces cuadradas no exactas, como el caso de $\sqrt{2}$ ya expuesto). Para muchos números irracionales no se puede aplicar este método, la representación de estos números se hace por aproximación. Por ejemplo, algunos números irracionales en la recta serían:



Una operación en **Q’** es una manera de asociar a cada par de números irracionales, otro número irracional bien determinado. Las operaciones que se definen en este conjunto son la suma, la resta, la multiplicación, el cociente y la extracción de raíces (exceptuando la radicación de números negativos de índice par).

[4] La sección áurea es la división armónica de un segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como este es a la totalidad. De esta manera se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad entre el todo dividido en mayor y menor. Matemáticamente es el resultado de la expresión: $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$.

Sean a , b y c tres números irracionales cualesquiera. Las propiedades básicas para la suma en **Q'** son:

1. Asociatividad:
$a+(b+c)=(a+b)+c$
2. Conmutatividad:
$a+b=b+a$
3. Inverso:
Para la suma existe $-a$, llamado opuesto o simétrico tal que $a+(-a)=0$

Las operaciones de suma y producto no son cerradas en **Q'** y no tiene elemento neutro.

III.5 NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales surge de la unión de los números racionales y de los irracionales. Se denotan como **R**. Este conjunto comprende a *todos* los sistemas numéricos anteriores.

$$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{Q'}$$

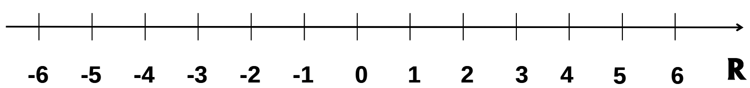
Se habla del *orden* en los números reales a través de la propiedad de *tricotomía* afirmando que dados n y m dos números reales, entonces se tiene exactamente una de las tres posibilidades:

$$n<m$$

$$n=m$$

$$n>m$$

Al igual que en los conjuntos **N**, **Z**, **Q** y **Q'**, los números reales se pueden representar en una recta, sólo que en este caso no hay puntos discretos, sino se trata de una recta continua:



La recta **R** sobre la cual se representa a los números racionales e irracionales se llama *recta real*. A cada punto de esta recta se le asocia un único número real llamado *coordenada* o *abscisa* del punto y, recíprocamente, a cada punto de esa recta se le asocia un único número para que sea su coordenada. Si esta doble asignación se hace de manera que puntos distintos tengan coordenadas distintas y cada número sea coordenada de algún punto, se ha obtenido una correspondencia *biunívoca* entre la recta y el conjunto de los números reales. Esta asignación se denomina *sistema de coordenadas unidimensional*.

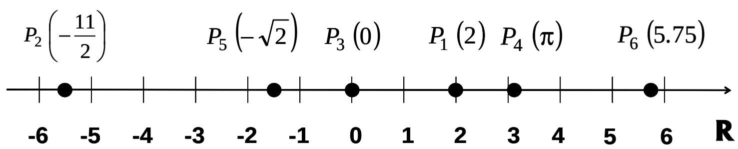
En general, dado un punto P cualquiera en la recta, al número real a se le llama coordenada o abscisa de P y se denota por $P(a)$, que se lee: punto P de coordenada a .

Ejemplo.

Ubicar de forma aproximada los siguientes números en la recta real: $2,\ -\frac{11}{2},\ 0,\ \pi,\ -\sqrt{2},\ 5.75$

Solución.

En forma de coordenadas, los números toman la forma: $P_1(2)$, $P_2\left(-\frac{11}{2}\right)$, $P_3(0)$, $P_4(\pi)$, $P_5\left(-\sqrt{2}\right)$, $P_6(5.75)$ que en la recta real están localizados así[5]:



Una operación en **R** es una manera de asociar a cada par de números reales, otro número real bien determinado. Las operaciones que se definen en este conjunto son la suma, la multiplicación (la resta se considera como la suma de números de diferente signo y la división como la multiplicación de un número por el recíproco de otro, siempre cuando el segundo no sea cero), la radicación de números positivos y la radicación de índice impar de números negativos. Es decir, las operaciones que se definen en este conjunto son todas *excepto dos*:

- La división por cero
- La extracción de raíces de índice par de números negativos.

Sean a, b y c tres números reales cualesquiera. Las propiedades básicas para la suma y el producto en **R** son:

1. Cerradura:
$a+b\in \mathbf{R}$
$a\cdot b\in \mathbf{R}$
2. Asociatividad:
$a+(b+c)=(a+b)+c$
$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
3. Conmutatividad:
$a+b=b+a$
$a\cdot b=b\cdot a$
4. Elementos neutros
Para la suma es el cero ya que: $a+0=a$
Para el producto es el uno ya que: $a\cdot 1=a$
5. Inversos:
Para la suma existe $-a$, llamado opuesto o simétrico tal que $a+(-a)=0$
Para el producto existe $\frac{1}{a}$, $a\neq 0$, llamado inverso multiplicativo o *recíproco* tal que $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$
6. Distributividad
La propiedad distributiva del producto sobre la suma es: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

---

[5] El punto $P_5\left(-\sqrt{2}\right)$ se ubicó de forma aproximada a su valor de -1.4142. Sin embargo, también se puede obtener aplicando el Teorema de Pitágoras trazando un triángulo cuya base o cateto adyacente es -1 y cuya altura o cateto opuesto es 1 y desde el origen se trazó con un compás un arco de circunferencia en sentido inverso a las manecillas del reloj (por ser negativo). El punto en que cruza la recta es su representación en la recta numérica.

Sea la suma de dos números reales: $a+b$, al dividir por b, se obtiene $\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{a}{b}+1$

Sea el producto de dos números reales: $a\cdot b$, al dividir por b, se obtiene $\frac{a\cdot b}{b}=a\cdot\frac{b}{b}=a\cdot 1=a$

Nótese la diferencia de los resultados, esto obedece a que al dividir implícitamente se aplicó el inverso multiplicativo de b. En el segundo caso, la fracción se convierte en un número entero y en el primer caso la fracción persiste. Esto significa que $\frac{a+b}{b}\neq a$.

Ejemplo.

Dados los números $a=4$ y $b=5$, comprobar que $\frac{a+b}{b}\neq a$

Solución.

$$\frac{4+5}{5}=\frac{4}{5}+\frac{5}{5}=0.8+1=1.8\neq 4$$

Los números reales son el conjunto con el que se trabajará en este libro, sin embargo no son los más completos, porque si se necesita extraer la raíz de un número negativo con índice par, los números reales no son suficientes, por lo que es necesario definir otro sistema numérico que permita tal operación. Este nuevo sistema se definirá en el subtema VI.4.

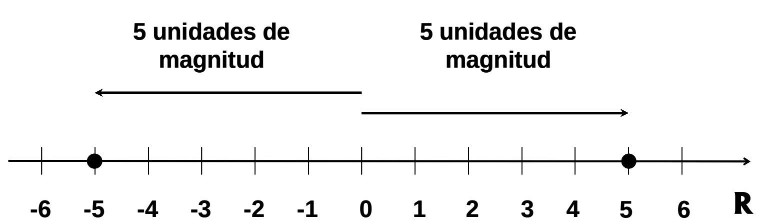
III.6 VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real representa la magnitud de dicho número. Esta magnitud es la distancia que existe, sobre la recta numérica, del número dado al cero. El valor absoluto se indica escribiendo el número entre barras verticales.

La definición formal del valor absoluto es:

$$|x|=\begin{cases} x & si \quad x\geq 0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases}$$

Por ejemplo, la magnitud de 5 es 5 $\Rightarrow$ $|5|=5$ y la magnitud de -5 es 5 $\Rightarrow$ $|-5|=5$. Esto se aprecia en la siguiente figura:



$|-5|=5$ y $|5|=5$

Ejemplos.

La magnitud de 3 es 3, $\Rightarrow \quad |3| = 3$

La magnitud de $-\frac{4}{7}$ es $\frac{4}{7}$, $\Rightarrow \quad \left|-\frac{4}{7}\right| = \frac{4}{7}$.

La magnitud de 0 es 0, $\Rightarrow \quad |0| = 0$

La magnitud de $-\sqrt{2}$ es $\sqrt{2}$, $\Rightarrow \quad \left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$.

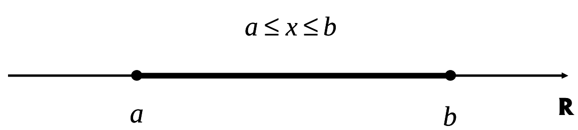
Lo anterior significa que si x es positivo o cero, x es su propio valor absoluto. Si x es negativo, entonces su opuesto $-x$ es el valor absoluto.

III.7 INTERVALOS

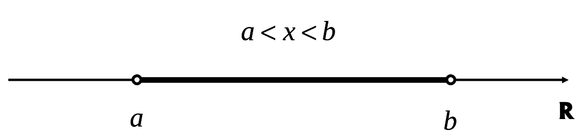
A un segmento de la recta numérica que representa al subconjunto de los números reales se le denomina *intervalo*.

Si a y b son dos números reales tales que $a < b$, entonces los intervalos son subconjuntos de $\mathbf{R}$ que formalmente se definen como:

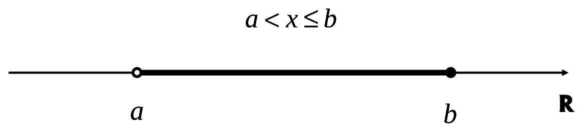
- *Cerrados*. Cuando sus extremos sí pertenecen al subconjunto. Se representan como $[a,b]$ y comprende todos los números reales x que cumplen con: $[a,b] = \{\, x \mid a \le x \le b, \quad x \in \mathbf{R} \,\}$.



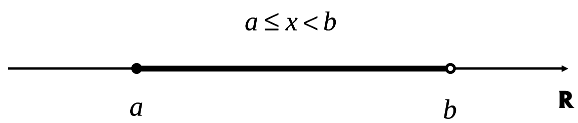
- *Abiertos*. Cuando sus extremos no pertenecen al subconjunto. Se representan como (a,b) y comprende todos los números reales x que cumplen con: $(a,b) = \{\, x \mid a < x < b, \quad x \in \mathbf{R} \,\}$.



- *Semiabiertos por la izquierda*. Cuando el primer extremo no pertenece al subconjunto y el segundo extremo si. Se representa como $(a,b]$ y comprende todos los números reales x que cumplen con: $(a,b] = \{\, x \mid a < x \le b, \quad x \in \mathbf{R} \,\}$.

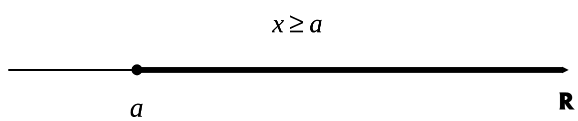


- *Semiabiertos por la derecha*. Cuando el primer extremo pertenece al subconjunto y el segundo extremo no. Se representa como $[a,b)$ y comprende todos los números reales x que cumplen con: $[a,b) = \{ x \mid a \leq x < b, \quad x \in \mathbf{R} \}$.

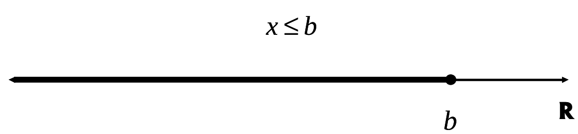


- *Infinitos*. El infinito, ya sea positivo o negativo, no es un extremo determinado, así que siempre será abierto. Existen cinco casos:

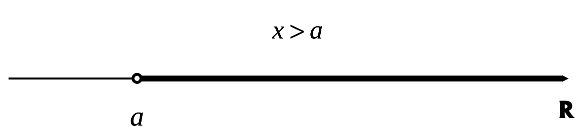
Cerrados a la izquierda: $[a,\infty) = \{ x \mid x \geq a, \quad x \in \mathbf{R} \}$.



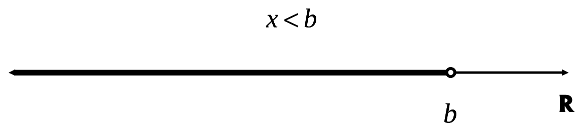
Cerrados a la derecha: $(-\infty,b] = \{ x \mid x \leq b, \quad x \in \mathbf{R} \}$.



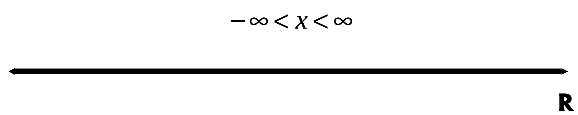
Abiertos a la izquierda: $(a,\infty) = \{ x \mid x > a, \quad x \in \mathbf{R} \}$.



Abiertos a la derecha: $(-\infty, b) = \{\, x \mid x < b, \quad x \in \mathbf{R} \,\}$.

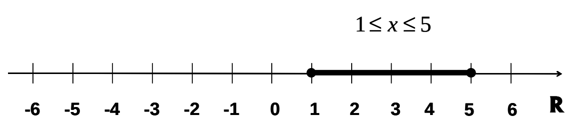


Abierto completamente: es aquel que contiene a todos los números reales:
$(-\infty, \infty) = \{\, x \mid -\infty < x \leq \infty, \quad x \in \mathbf{R} \,\}$.

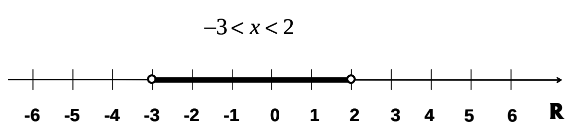


Ejemplos.
Graficar los siguientes intervalos:

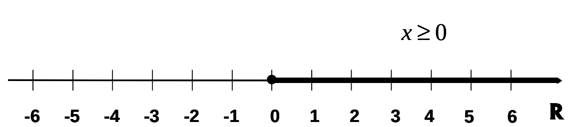
1) $[1, 5]$



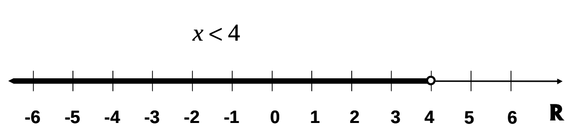
2) $(-3, 2)$



3) $[0, \infty)$



4) $(-\infty, 4)$



III.8 LEYES DE EXPONENTES

Sea un número real x. Si se multiplica por sí mismo se obtiene $x \cdot x$. Si a este resultado se multiplica nuevamente por x resulta $x \cdot x \cdot x$. De manera sucesiva, si x se multiplica por si misma n veces, se obtiene: $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \quad veces}$

Para simplificar este tipo de expresiones se acostumbra utilizar una notación abreviada, tal que:

$$x \cdot x = x^2$$
$$x \cdot x \cdot x = x^3$$
$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$$
$$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$$

y en general:

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \quad veces} = x^n$$

Donde x es llamada *base* y el número n escrito arriba y a su derecha, es llamado *exponente*. El exponente indica el número de veces que la base se toma como factor.

Primera ley de los exponentes

Sea un número real x diferente de cero y dos números naturales n y m también diferentes de cero. Entonces, se cumple que:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

Al multiplicar potencias con la misma base, se mantiene la base y se suman los exponentes.

Ejemplos.

1) $\left(x^3\right)\left(x^2\right) = x^{3+2} = x^5$

2) $\left(4a^2\right)\left(5a^6\right) = 20a^8$

3) $\left(2k^4\right)\left(-k^2\right)\left(5k^7\right) = -10k^{13}$

4) $\left(8ab^3\right)\left(\frac{3}{4}a^2b\right) = 6a^3b^4$

5) $\left(\frac{6}{5}p^3q^5\right)\left(-\frac{8}{4}p^6q^4\right)\left(\frac{1}{12}q\right) = -\frac{48}{240}p^9q^{10} = -\frac{1}{5}p^9q^{10}$

Segunda ley de los exponentes

Sea un número real x diferente de cero y dos números naturales n y m también diferentes de cero. Entonces, se cumple que:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Al dividir potencias con la misma base, se mantiene la base y se restan los exponentes.

Ejemplos.

1) $\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$

2) $\frac{10a^8}{-5a^3} = -2a^5$

3) $\frac{-28k^7m^3}{-7k^5m} = 4k^2m^2$

4) $\frac{\frac{2}{3}a^6}{\frac{1}{4}a^4} = \frac{8}{3}a^2$

5) $\frac{-32x^3y^6z^7}{48x^2y^2z} = -\frac{2}{3}xy^4z^6$

Tercera ley de los exponentes

Sea un número real x diferente de cero. Si en la ley anterior, se hace que $n = m$, se tiene que: $\frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0$.

Pero al dividir una expresión por si misma el resultado es la unidad, así que se cumple que:

$$x^0 = 1$$

Cualquier base diferente de cero elevada a la potencia cero es uno.

1) $\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0 = 1$

2) $5a^0 = 5(1) = 5$

3) $(xyz)^0 = 1$

4) $\frac{27a^3}{9a^3} = 3$

5) $\frac{x^3x^4x^6}{-x^6x^7} = \frac{x^{13}}{-x^{13}} = -x^{13-13} = -x^0 = -1$

Cuarta ley de los exponentes

Sea un número real x diferente de cero y dos números naturales n y m también diferentes de cero. Entonces, se cumple que:

$$\left(x^n\right)^m = x^{n\cdot m}$$

Al elevar una potencia a otra potencia, se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

Ejemplos.

1) $\left(x^3\right)^2 = x^{3(2)} = x^6$
2) $\left(a^3\right)^4 = a^{3(4)}a^{12}$
3) $\left(e^5\right)^3 = e^{5(3)} = e^{15}$

Quinta ley de los exponentes

Sean dos números reales x y y diferentes de cero y un número natural n también diferente de cero. Entonces, se cumple que:

$$(xy)^n = x^n y^n$$

El producto de uno o más factores que se elevan todos a la vez a un exponente es igual a un producto de cada factor elevado al exponente.

Ejemplos.

1) $\left(2a^2\right)^5 = 2^5 \cdot a^{10} = 32a^{10}$
2) $\left(-3k^4\right)^3 = (-3)^3 \cdot k^{12} = -27k^{12}$
3) $\left(5ab^3\right)^4 = 5^4 \cdot a^4 b^{12} = 625a^4 b^{12}$
4) $\left(4xy^2\right)^2 = 4^2 \cdot x^2 \cdot y^6 = 16x^2 y^6$
5) $\left(10m^5 n^2 p^3\right)^6 = 10^6 \cdot m^{30} \cdot n^{12} p^{18} = 1'000{,}000 m^{30} n^{12} p^{18}$

Sexta ley de los exponentes

Sean dos números reales x y y diferentes de cero y un número natural n también diferente de cero. Entonces, se cumple que:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad y \neq 0$$

El cociente de uno o más factores que se elevan todos a la vez a un exponente es igual al cociente de cada factor elevado al exponente.

Ejemplos.

1) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$

2) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^3 = \frac{(ab)^3}{(cd)^3} = \frac{a^3b^3}{c^3d^3}$

3) $\left(\frac{5p^3}{3}\right)^4 = \frac{(5p^3)^4}{3^4} = \frac{5^4(p^3)^4}{3^4} = \frac{625p^{12}}{81}$

4) $\left(\frac{8k^3}{4m^2}\right)^4 = \left(2\frac{k^3}{m^2}\right)^4 = 2^4\frac{(k^3)^4}{(m^2)^4} = 16\frac{k^{12}}{m^8}$

5) $\left(\frac{-4x^3y^5}{3w^4z^2}\right)^6 = \frac{(-4)^6(x^3)^6(y^5)^6}{(3)^6(w^4)^6(z^2)^{12}} = \frac{4{,}096x^{18}y^{30}}{729w^{24}z^{12}}$

Séptima ley de los exponentes

Sea un número real x diferente de cero. Si n es un número entero diferente de cero, por las leyes anteriores se cumple que:

$$\frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0 = x^n \cdot x^{-n} = 1$$

Pero el recíproco del número real x^n se definió como $\frac{1}{x^n}$, ya que cumple con $x^n \cdot \frac{1}{x^n} = 1$. Comparando las expresiones, se llega a:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Elevar una expresión a una potencia entera negativa, equivale a formar una fracción con numerador uno y cuyo denominador es la misma expresión pero con la potencia positiva.

Ejemplos.

1) $x^{-1} = \frac{1}{x}$

2) $6a^{-3} = \frac{6}{a^3}$

3) $\frac{24p^3q^5}{-3p^7q^{10}} = -8p^{-4}q^{-5} = -\frac{8}{p^4q^5}$

4) $\frac{27a^5b^3c^4}{18a^{11}bc^5} = \frac{3}{2}a^{-6}b^2c^{-1} = \frac{3b^2}{2a^6c}$

5) $(2x^3)^{-4} = 2^{-4}x^{-12} = \frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{x^{12}} = \frac{1}{16x^{12}}$

III.9 NOTACIÓN CIENTÍFICA

En las ciencias es frecuente encontrar cantidades muy grandes o muy pequeñas que contienen una gran cantidad de ceros.

Ejemplos.

1) La distancia media de la Tierra al Sol es de 149600000000 metros.

2) Un mililitro es la milésima parte de una millonésima de metro cúbico, es decir: $1\ ml = 0.000000001\ m^3$.

A fin de evitar escribir tanta cifra, estos números se pueden compactar mediante la *notación científica*.

La notación científica es un número escrito bajo la forma $A \times 10^n$, donde $1 \leq |A| < 10$ y n es un entero. Para transformar un número a notación científica, existen dos casos:

- Cuando el número es mayor o igual a diez, el punto decimal se recorre n posiciones a la izquierda y el exponente es positivo

- Cuando el número es menor de uno, el punto decimal se recorre n posiciones a la derecha y el exponente es negativo

En los ejemplos planteados, la distancia que separa a la Tierra del Sol se puede expresar como 1.496×10^{11} metros, por su parte, un mililitro equivale a 1×10^{-9} metros cúbicos.

Ejemplos.
Expresar los siguientes números en notación científica:

1) 7540000000
Solución.
Se recorre el punto decimal nueve posiciones a la izquierda: $7540000000 = 7.54 \times 10^9$

2) 0.00000000007926
Solución.
Moviendo el punto decimal once posiciones a la derecha: $0.00000000007926 = 7.926 \times 10^{-11}$

Para transformar un número expresado en notación científica a notación normal, existen dos casos:

- Cuando $n > 1$, se le agregan ceros hasta que el punto decimal recorra n posiciones a la derecha.
- Cuando $n < 1$, se le agregan ceros hasta que el punto decimal recorra n posiciones a la izquierda.

Ejemplos.
Convertir los siguientes números expresados en notación científica a notación normal:

1) 2.7×10^6
Solución.
Se recorre el punto decimal seis posiciones a la derecha y se agregan ceros:
$2.7 \times 10^6 = 2700000$

2) -3.18×10^{-9}
Solución.

Moviendo el punto decimal nueve posiciones a la izquierda y agregando ceros:
$-3.18\times 10^{-9} = -0.00000000318$

III.10 LOGARITMOS

Sea la expresión: $a^b = x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Se denomina *logaritmo* base a del número x al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número. Es decir:

$$log_a \ x = b$$

que se lee como "el logaritmo base a del número x es b" y como se puede apreciar, un logaritmo representa un exponente.

La constante a es un número real positivo distinto de uno, y se denomina *base* del logaritmo. La potencia a^b para cualquier valor real de b solo tiene sentido si $a > 0$.

Ejemplos.

1) $5^2 = 25 \ \Rightarrow \ log_5 \ 25 = 2$
2) $3^4 = 81 \ \Rightarrow \ log_3 \ 81 = 4$
3) $8^3 = 512 \ \Rightarrow \ log_8 \ 512 = 3$
4) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \ \Rightarrow \ log_{\frac{1}{2}} \ \frac{1}{64} = 6$
5) $4^{-5} = \frac{1}{1024} \ \Rightarrow \ log_4 \ \frac{1}{1024} = -5$

Logaritmos Decimales:

Se llaman logaritmos decimales a los logaritmos que tienen por base el número diez. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base:

$$log_{10} \ x = log \ x$$

Logaritmos Naturales:

Se llaman logaritmos naturales (también llamados neperianos) a los logaritmos que tienen por base el número irracional $e = 2.718281828459\cdots$, y se denotan como ln o por L:

$$log_e \ x = ln \ x = L \ x$$

Ejemplos.
$log_{10} \ 45 = log \ 45 \approx 1.653212$
$log_e \ 168 = ln \, 168 \approx 5.123963$

Para potencias enteras de diez, los logaritmos decimales cumplen con:

$10^{-2} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad log\ 0.01 = -2$

$10^{-1} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad log\ 0.1 = -1$

$10^{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad log\ 1 = 0$

$10^{1} = 10 \quad \Rightarrow \quad log\ 10 = 1$

$10^{2} = 100 \quad \Rightarrow \quad log\ 100 = 2$

$10^{3} = 1{,}000 \quad \Rightarrow \quad log\ 1{,}000 = 3$

$10^{4} = 10{,}000 \quad \Rightarrow \quad log\ 10{,}000 = 4$

Los logaritmos decimales de los números comprendidos entre otros dos, cuyos logaritmos decimales son números enteros, son números decimales. Todo número decimal se compone de parte entera y parte decimal. La parte entera recibe el nombre de *característica* y la parte decimal, *mantisa*.

La parte entera del logaritmo o característica depende del intervalo en el que se defina el número y la parte decimal o mantisa del valor de las cifras significativas del número.

Por ejemplo, para $log\ 45 = 1.653212\cdots$, la característica es 1 y la mantisa es $0.653212\cdots$.

La mantisa siempre es positiva, pero la característica puede ser cero si el número está comprendido entre 1 y 10, es positiva, sí el número es mayor que 10 o negativa si el número es menor que 1. Las potencias de 10 sólo tienen característica, su mantisa es 0. En el logaritmo de un número menor que 1 la característica es negativa, pero la mantisa es positiva. Por ejemplo $log\ 0.5 \approx -1 + 0.698970$ y no puede escribirse como -1.698970, pues esto indica que tanto la característica como la mantisa son negativas. El modo correcto de escribirlo, indicando que sólo la característica es negativa, es $\bar{1}.698970$.

Ejemplos.

1) Para $log\ 624 \approx 2.795184$, la característica es 2

2) Para $log\ 7 \approx 0.845098$, la característica es 0

3) Para $log\ 0.029 \approx \bar{2}.462398$, la característica es -2

Las propiedades de los logaritmos son las siguientes:

1) $log_a\ 1 = 0$

2) $log_a\ a = 1$

3) $log_a\ (u \cdot v) = log_a u + log_a\ v$

4) $log_a \left(\frac{u}{v}\right) = log_a u - log_a\ v$

5) $log_a\ u^n = n \cdot log_a\ u$

6) $log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} log_a\ u$

Ejemplos.
Comprobar las propiedades de los logaritmos.

1) $log\ 10^0 = log\ 1 = 0$

2) $log\ 10 = 1$

3) $log\ (100 \cdot 1{,}000) = log\ 100{,}000 = 5$

que equivale a calcular: $log\ 100 + log\ 1{,}000 = 2 + 3 = 5$

4) $log\ \left(\frac{1'000{,}000}{100}\right) = log\ 10{,}000 = 4$

que equivale a calcular: $log\,1'000{,}000 - log\ 100 = 6 - 2 = 4$

5) $log\ 10^2 = log\ 100 = 2$

que equivale a calcular: $2 \cdot log\ 10 = 2(1) = 2$

6) $log\ \sqrt{10{,}000} = log\ 100 = 2$

que equivale a calcular: $\frac{1}{2} \cdot log\ 10{,}000 = \frac{1}{2}(4) = 2$

Ejemplo.

Aplicando las propiedades de los logaritmos, simplificar la siguiente expresión: $log_6 \left[\frac{(5a)(3b)}{2c}\right]^4$

Solución.

$$log_6 \left[\frac{(5a)(3b)}{2c}\right]^4 = 4\,log_6 \frac{(5a)(3b)}{2c} = 4[log_6 (5a)(3c) - log_6 2c] = 4(log_6 5a + log_6 3b - log_6 2c)$$

Ejemplo.
Sabiendo que $log\ 100 = 2$ y que $log\ 4 \approx 0.6020$, aplicando las propiedades de los logaritmos y sin usar la calculadora, determinar los valores aproximados de: $log\,400$, $log\ 25$, $log\ 16$, $log\ 2$.

Solución.

$$log\ 400 = log\ (100)(4) = log\,100 + log\ 4 \approx 2 + 0.6020 \approx 2.6020$$

$$log\ 25 = log\ \frac{100}{4} = log\,100 - log\ 4 \approx 2 - 0.0620 \approx 1.398$$

$$log\,16 = log\ 4^2 = 2\,log\ 4 \approx 2(0.0620) \approx 1.204$$

$$log\ 2 = log\ \sqrt{4} = \frac{1}{2} log\ 4 \approx \frac{0.6020}{2} \approx 0.3010$$

Un *antilogaritmo* es el número que corresponde a un logaritmo dado. Consiste en el problema inverso al cálculo del logaritmo de un número. Esto es:

$$log_a\ x = y \quad \Leftrightarrow \quad anti\,log_a\ y = x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

es decir, consiste en elevar la base al número que resulta.

Ejemplo.
$log_{10}\ 4{,}527 \approx 3.655810 \quad \Leftrightarrow \quad anti\,log_{10}\ 3.655810 \approx 4{,}527 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{3.655810} \approx 4{,}527$

Cambio de Base:

Dada una base conocida b, para calcular un logaritmo de un número x en cualquier base a, se aplica la siguiente expresión: $log_a\ x = \frac{log_b\ x}{log_b\ a}$.

Por conveniencia, la base elegida para b generalmente es la diez, así que la expresión queda como:

$$log_a\ x = \frac{log_{10}\ x}{log_{10}\ a}$$

Ejemplo.
Calcular: $log_3\ 570$

Solución: se identifican las variables: $a = 3,\ x = 570,\ b = 10$

$log_3\ 570 = \frac{log\ 570}{log\ 3} \approx \frac{2.755874}{0.477121} \approx 5.776048$

Comprobación: $3^{5.776048} \approx 570$