OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS

UNIDAD IV

IV.1 OPERACIONES CON MONOMIOS

Una *variable* es un elemento de una fórmula, proposición o algoritmo que puede adquirir o ser sustituido por un valor cualquiera.

Un *coeficiente* es un factor multiplicativo que pertenece a una variable.

Una *constante* es un valor fijo, aunque a veces no determinado.

Expresiones algebraicas son todas aquellas que combinan constantes y variables mediante operaciones.

Ejemplos.

1) $9x^2y^3z^4$, el coeficiente es 9 y las variables son $x^2y^3z^4$

2) $-\frac{4}{3}a^5b^8+\frac{2c}{7d^4}$, los coeficientes son $-\frac{4}{3}$ y $\frac{2}{7}$; las variables son a^5b^8 y $\frac{c}{d^4}$

Un *término algebraico* es cada sumando de una expresión algebraica.

Los términos poseen grados de dos tipos:

- Grado *absoluto*. Es la suma de los exponentes de las literales que forman al término.
- Grado *relativo*. Es aquel exponente que tiene una literal específica.

Ejemplos.

1) En el término $5x^2y^3z^4$, el grado absoluto es 9 y el grado relativo de la literal x es 2 .

2) En el término $7a^5bc^6$, el grado absoluto es 12 y el grado relativo de la literal b es 1 .

Se define como *monomios* a las expresiones algebraicas que constan de un solo término.

Ejemplos.

1) $5a^4b^2c$

2) $-\frac{2}{11}\left(x^3y^3\right)^4$

3) $5\sqrt{a^7}$

El *valor numérico de un monomio* es el número que se obtiene al sustituir las literales por valores específicos, después de efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplos.

1) Si en el monomio $4a^2b$, las literales toman los valores $a=2$ y $b=-3$, su valor numérico es: $4(2^2)(-3)=-48$

2) Si en el monomio $-\frac{4}{3}x^3yz^2$, las literales toman los valores $x=-1$, $y=9$ y $z=\frac{1}{2}$, su valor numérico es: $-\frac{4}{3}(-1)^3 9\left(\frac{1}{2}\right)^2=3$

Términos semejantes. Son aquellos que tienen la parte literal igual. Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal, es decir, las mismas literales elevadas a los mismos exponentes.

Ejemplos.

1) $3x^2$ y $7x^2$ son términos semejantes
2) $\frac{5}{2}k^2m^4np^3$ y $-12nk^2p^3m^4$ son términos semejantes
3) $2a^2b$ y $6ab^2$ no son términos semejantes

Suma de monomios

Para *sumar monomios* tienen que ser semejantes. El resultado es un monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma de los coeficientes de cada monomio.

Ejemplos.
Sumar los siguientes monomios:

1) $5x^4+2x^4+8x^4+4x^4=19x^4$
2) $7a^2b^5c+a^2b^5c+2ca^2b^5=10a^2b^5c$
3) $\frac{4}{3}yz^3+\frac{1}{2}yz^3+\left(-\frac{5}{4}yz^3\right)=\frac{7}{12}yz^3$

Resta de monomios

Para *restar monomios* también es necesario que sean semejantes. El resultado es un monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la resta de los coeficientes de cada monomio.

Ejemplos.

1) $11x^2-4x^2-2x^2-x^2=4x^2$
2) $15k^4m^3-10k^4m^3-12m^3k^4=-7k^4m^3$
3) $\frac{2}{5}ab^2c-\left(-\frac{1}{2}ab^2c\right)-2acb^2=-\frac{11}{10}ab^2c$

Multiplicación de monomios

Para *multiplicar monomios* no es necesario que sean semejantes. Una vez que se aplican las leyes de los exponentes que se requieran, se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de cada literal.

Ejemplos.

1) $(2x^3)(5x^5)=10x^8$
2) $(4e^2f^3g^2)(3e^2hg)(-7f^5h^5)=-84e^4f^8g^3h^6$
3) $(yz^3)^2(-5y^2z)^3(-2y^3z^4)^4=(y^2z^6)(-125y^6z^3)(16y^{12}z^{16})=-2{,}000y^{20}z^{25}$

División de monomios

Para *dividir* dos monomios, tampoco es necesario que sean semejantes. Una vez que se aplican las leyes de los exponentes que se requieran, se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de cada literal.

Ejemplos.

1) $\frac{12a^5}{6a^2}=2a^3$
2) $\frac{64x^4y^5z^2}{16x^2y^5z}=4x^2z$
3) $\frac{48k^5m^3n^4}{-8k^2m^7n}=-6k^3m^{-4}n^3=-\frac{6k^3n^3}{m^4}$

IV.2 OPERACIONES CON POLINOMIOS

Un *polinomio* en x de grado n es una expresión del tipo:

$$P(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n$$

donde $n\in\mathbf{N}$ y $a_o, a_1, a_2, \cdots, a_n$ son coeficientes reales y se lee como "P de x".

El *grado* de un polinomio con respecto a una literal es el mayor exponente de sus términos.

Ejemplos.

1) $5+2x-6x^2+8x^3$ el grado es 3
2) $2x^3-8x+2x^4-1+10x^2$ el grado es 4
3) $14+7x^3m^4+12m+8x^2m-7x^5m^3+5xm^2$ el grado con respecto a x es 5

Para ordenar un polinomio con respecto a una literal, se puede efectuar de manera descendente (posicionándola de mayor a menor grado) o de forma ascendente (ubicándola de menor a mayor grado).

Ejemplos.

1) El polinomio $2x^2 - 9 + 6x^4 - 5x^3 + 10x$ ordenado de forma descendente es:
$6x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 10x - 9$

2) El polinomio $8x^2y^2 + 12 - 7x^3y + 5xy^3$ ordenado de forma ascendente con respecto a x es:
$12 + 5xy^3 + 8x^2y^2 - 7x^3y$

Completar un polinomio es añadir los términos intermedios que falten poniendo de coeficiente 0.

Ejemplo.

El polinomio $8x^3 - 2 - 9x - 13x^6 - 5x^4$ ordenado de forma descendente y completándolo es:
$-13x^6 + 0x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 0x^2 - 9x - 2$

Suma de polinomios

Para *sumar polinomios* se suprimen los signos de agrupación precedidos del signo $(+)$, dejando el mismo signo de cada uno de los términos que se hallan dentro de él y se simplifican los términos que sean semejantes.

Ejemplos.

1) $(5x^2 - 3x + 7) + (4x^2 + 2x - 11) = 5x^2 - 3x + 7 + 4x^2 + 2x - 11 = 9x^2 - x - 4$
2) $(6k + 3k^2 - 7k^4 - 8) + (5k^2 + 12k^3 + 2k^5 - 4k) = 6k + 3k^2 - 7k^4 - 8 + 5k^2 + 12k^3 + 2k^5 - 4k$
$= 2k^5 - 7k^4 + 12k^3 + 8k^2 + 2k - 8$
3) $(6ab^3 + 1 - 4a^3b + 8a^2b^2) + (5a^2b^2 - 3ab^3 + 9 - a^3b) + (11a^3b - 7ab^3 + 2)$
$= 6ab^3 + 1 - 4a^3b + 8a^2b^2 + 5a^2b^2 - 3ab^3 + 9 - a^3b + 11a^3b - 7ab^3 + 2 = 6a^3b + 13a^2b^2 - 4ab^3 + 12$
4) $\left(\frac{7}{6} - \frac{4}{3}x + \frac{5}{2}x^2\right) + \left(4x + \frac{8}{5}x^2 + \frac{11}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}x^2 - 1 + \frac{6}{5}x\right)$
$= \frac{7}{6} - \frac{4}{3}x + \frac{5}{2}x^2 + 4x + \frac{8}{5}x^2 + \frac{11}{2} + \frac{3}{4}x^2 - 1 + \frac{6}{5}x = \frac{97}{20}x^2 + \frac{58}{15}x + \frac{17}{3}$

Resta de polinomios

Para *restar polinomios* se suprimen los signos de agrupación precedidos del signo (-), cambiando el signo de cada uno de los términos del sustraendo y se simplifican los términos que sean semejantes.

Ejemplos.

1) $(9x^3 + 4x^2 + 5x - 2) - (7x^3 - 2x^2 - 6x + 5) = 9x^3 + 4x^2 + 5x - 2 - 7x^3 + 2x^2 + 6x - 5$
$= 2x^3 + 6x^2 + 11x - 7$
2) $(5a + 2a^4 - 9a^5 - 4a^3 + 14) - (3a^2 - 7 + 5a^3 - 4a^6 - 9a^4 + 3a)$
$= 5a + 2a^4 - 9a^5 - 4a^3 + 14 - 3a^2 + 7 - 5a^3 + 4a^6 + 9a^4 - 3a$
$= 4a^6 - 9a^5 + 11a^4 - 9a^3 - 3a^2 + 2a + 21$
3) $(5k^2p + 10 - 4k^3p^2 + 8kp^4) - (4k^3p^2 - 4k^2p + 2 - 5kp^4) - (15 + 6k^3p^2 - 3k^2p)$

$$=5k^2p+10-4k^3p^2+8kp^4-4k^3p^2+4k^2p-2+5kp^4-15-6k^3p^2+3k^2p$$
$$=-14k^3p^2+12k^2p+13kp^4-7$$

4) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}x^2+\frac{8}{7}x\right)-\left(\frac{4}{3}x-\frac{12}{5}+\frac{9}{2}x^2\right)-\left(-\frac{11}{4}x^2-\frac{1}{3}x+7\right)$

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{6}x^2+\frac{8}{7}x-\frac{4}{3}x+\frac{12}{5}-\frac{9}{2}x^2+\frac{11}{4}x^2+\frac{1}{3}x-7=-\frac{31}{12}x^2+\frac{1}{7}x-\frac{59}{15}$$

Producto de un monomio por un polinomio

Para *multiplicar un monomio por un polinomio* se multiplican todos los términos del polinomio por el monomio, es decir, es una suma de producto de monomios.

Ejemplos.

1) $2x^2(5x^4-3x^3+7x^2+2x-8)=2x^2(5x^4)-2x^2(3x^3)+2x^2(7x^2)+2x^2(2x)-2x^2(8)$
$$=10x^6-6x^5+14x^4+4x^3-16x^2$$

2) $(-5a^3b^2)(9ab^4+10a^3b^5-2a^2b+6+3a-7b^2)$
$$=-45a^4b^6-50a^6b^7+10a^5b^3-30a^3b^2-15a^4b^2+35a^3b^4$$

3) $\left(\frac{3}{2}e^2f^4g^3\right)(4ef^4h-8e^3g^5-12f^2h^4+6e^3+22gh^2-10eh^3)$
$$=6e^3f^8g^3h-12e^5f^4g^8-18e^2f^6g^3h^4+9e^5f^4g^3+33e^2f^4g^4h^2-15e^3f^4g^3h^3$$

4) $3a^2\left(5a-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{15}a^3\right)=15a^3-a^4+\frac{6}{15}a^5=15a^3-a^4+\frac{2}{5}a^5$

Multiplicación de dos polinomios

Para *multiplicar dos polinomios* se aplica la propiedad distributiva del producto sobre la suma, esto es, se multiplican todos los términos del segundo polinomio por cada uno de los términos del primero y se reducen los términos semejantes. La multiplicación de polinomios es distributiva respecto a la adición.

Ejemplos.

1) $(3x^2-5x+6)(4x^2-7x+2)=12x^4-21x^3+6x^2-20x^3+35x^2-10x+24x^2-42x+12$
$$=12x^4-41x^3+65x^2-52x+12$$

2) $(4a^2-12ab+9b^2)(16a^2-4b^2)=64a^4-16a^2b^2-192a^3b+48ab^3+144a^2b^2-36b^4$
$$=64a^4-192a^3b+128a^2b^2+48ab^3-36b^4$$

3) $(2yz^2-5yz^3-1)(3yz^4+5y^3z-6z^2-y)=6y^2z^6+10y^4z^3-15yz^4-2y^2z^2-15y^2z^7-25y^4z^4$
$$+30yz^5+5y^2z^3-5y^3z+6z^2+y$$

División de un polinomio por un monomio

Para *dividir un polinomio por un monomio*, se divide cada término del dividendo por el divisor, es decir, es una suma de cociente de monomios.

Ejemplos.

1) $$\frac{60x^6-24x^5-48x^4+84x^3}{12x^2}=\frac{60x^6}{12x^2}-\frac{24x^5}{12x^2}-\frac{48x^4}{12x^2}+\frac{84x^3}{12x^2}=5x^4-2x^3-4x^2+7x$$

2) $$\frac{40w^3y^4-90w^6y^3-65w^5y^2-5w^3y^5+15w^3y}{-5w^3y}=-8y^3+18w^3y^2+13w^2y+y^4-3$$

3) $$\frac{54p^5q^4r^4-60p^6q^7r^3-36p^3q^5r^6-24p^6q^4r^5-90p^4q^4r^3}{6p^2q^4r^3}$$
$$=9p^3r-10p^4q^3-6pqr^3-4p^4r^2-15p^2$$

Cociente de dos polinomios

Para *dividir dos polinomios* se efectúa el siguiente procedimiento:

- Se ordenan los polinomios de forma descendente con respecto al grado de una misma variable.
- Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor y se obtiene el primer término del cociente.
- Se resta del dividendo el producto del primer término del cociente por el divisor y se obtiene el primer residuo (esto implica cambiar todos los signos del producto efectuado y reducir términos semejantes con el dividendo).
- Se bajan los términos restantes del dividendo sumándolos al residuo anterior.
- Se divide el primer término del residuo por el primer término del divisor, obteniendo así el segundo término del cociente.
- Se procede de forma análoga hasta obtener un residuo nulo o de grado inferior al del divisor.
- Comprobar el resultado mediante el algoritmo: $(cociente)(divisor)+residuo=dividendo$

Ejemplos.

1) Dividir $x^4-6x^3-25x^2-5x+9$ por $x+3$

Solución.

$$x^3-9x^2+2x-11$$
$$x+3\;\big)\;x^4-6x^3-25x^2-5x+9$$
$$\underline{-x^4-3x^3}$$
$$-9x^3-25x^2-5x+9$$
$$\underline{9x^3+27x^2}$$
$$2x^2-5x+9$$
$$\underline{-2x^2-6x}$$
$$-11x+9$$
$$\underline{11x+33}$$
$$42$$

Comprobación: $(x+3)(x^3-9x^2+2x-11)+42=x^4-9x^3+2x^2-11x+3x^3-27x^2+6x-33+42$
$$=x^4-6x^3-25x^2-5x+9$$

2) Dividir $2x^4+3x^3-2x^2+4x+1$ por x^2-x+1

Solución.

$$
\begin{array}{r}
2x^2+5x+1 \qquad\qquad\quad \\
x^2-x+1 \overline{\big)\; 2x^4+3x^3-2x^2+4x+1} \\
\underline{-2x^4+2x^3-2x^2 \qquad\qquad} \\
5x^3-4x^2+4x+1 \\
\underline{-5x^3+5x^2-5x \qquad} \\
x^2-x+1 \\
\underline{-x^2+x-1} \\
0
\end{array}
$$

Comprobación: $(x^2-x+1)(2x^2+5x+1)+0=2x^4+5x^3+x^2-2x^3-5x^2-x+2x^2+5x+1+0$
$=2x^4+3x^3-2x^2+4x+1$

3) Dividir x^3+8 por $x+2$

Solución.
Completando el polinomio y efectuando la división:

$$
\begin{array}{r}
x^2-2x+4 \qquad \\
x+2 \overline{\big)\; x^3-0x^2+0x+8} \\
\underline{-x^3-2x^2 \qquad\qquad} \\
-2x^2+0x+8 \\
\underline{2x^2+4x \qquad} \\
4x+8 \\
\underline{-4x-8} \\
0
\end{array}
$$

Comprobación: $(x+2)(x^2-2x+4)+0=x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8+0=x^3+8$
$=x^3+8$

4) Dividir $30k^3-22k^2-14k+9$ por $5k+3$

Solución.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6k^2-8k+2 \\ \hline
5k+3 & 30k^3-22k^2-14k+9 \\
 & \underline{-30k^3-18k^2} \\
 & \qquad -40k^2-14k+9 \\
 & \qquad \underline{40k^2+24k} \\
 & \qquad\qquad 10k+9 \\
 & \qquad\qquad \underline{-10k-6} \\
 & \qquad\qquad\qquad 3
\end{array}
$$

Comprobación: $(5k+3)(6k^2-8k+2)+3=30k^3-40k^2+10k+18k^2-24k+6+3$
$=30x^3-22k^2-14k+9$

5) Dividir $30a^3+4a^2b-22ab^2+4b^3$ por $6a-4b$

Solución.
La división se ejecutará respecto a la variable a:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5a^2+4ab-b^2 \\ \hline
6a-4b & 30a^3+4a^2b-22ab^2+4b^3 \\
 & \underline{-30a^3+20a^2b} \\
 & \qquad 24a^2b-22ab^2+4b^3 \\
 & \qquad \underline{-24a^2b+16ab^2} \\
 & \qquad\qquad -6ab^2+4b^3 \\
 & \qquad\qquad \underline{6ab^2-4b^3} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Comprobación: $(6a-4b)(5a^2+4ab-b^2)+0=30a^3+24a^2b-6ab^2-20a^2b-16ab^2+4b^3$
$=30a^3+4a^2b-22ab^2+4b^3$

IV.3 VALOR Y GRÁFICA DE POLINOMIOS EN UNA SOLA VARIABLE

Dado un polinomio de la forma:

$$P(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

Se conoce como *valor de un polinomio* $P(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ para $x=c$, al valor numérico que toma el polinomio cuando se sustituye la variable, x, por el número c y se realizan las operaciones. Se denota como $P(c)$ y se lee "P de c".

Ejemplos.

1) Evaluar el polinomio $P(x)=-5x^2+8x+14$ para $x=3$.
Solución.

$$P(3)=-5(3)^2+8(3)+14=-45+24+14=-7$$

2) Evaluar el polinomio $P(x)=x^4+4x^3+7x^2+6x+5$ para $x=-2$.
Solución.

$$P(-2)=(-2)^4+4(-2)^3+7(-2)^2+6(-2)+5=16-32+28-12+5=5$$

3) Evaluar el polinomio $P(x)=8x^3+10x^2-7x+2$ para $x=\frac{1}{4}$.
Solución.

$$P\left(\frac{1}{4}\right)=8\left(\frac{1}{4}\right)^3+10\left(\frac{1}{4}\right)^2-7\left(\frac{1}{4}\right)+2=\frac{8}{64}+\frac{10}{16}-\frac{7}{4}+2=\frac{1}{8}+\frac{5}{8}-\frac{7}{4}+2=$$
$$=\frac{1+5-14+16}{8}=\frac{8}{8}=1$$

Como se definió en el subtema I.6, el plano cartesiano es un sistema formado por dos ejes numéricos reales perpendiculares donde su origen es el punto en que se cruzan. El eje horizontal (x) recibe el nombre de eje de las *abscisas* y el eje vertical (y) recibe el nombre de eje de las *ordenadas*.

La gráfica de un polinomio está formada por el conjunto de parejas coordenadas (x, y) que cumplen o satisfacen la regla de correspondencia $P(x)$.

Los polinomios $P(x)$ pueden evaluarse para todo $x\in \mathbf{R}$ y por ello se unen los puntos obtenidos para obtener sus gráficas.

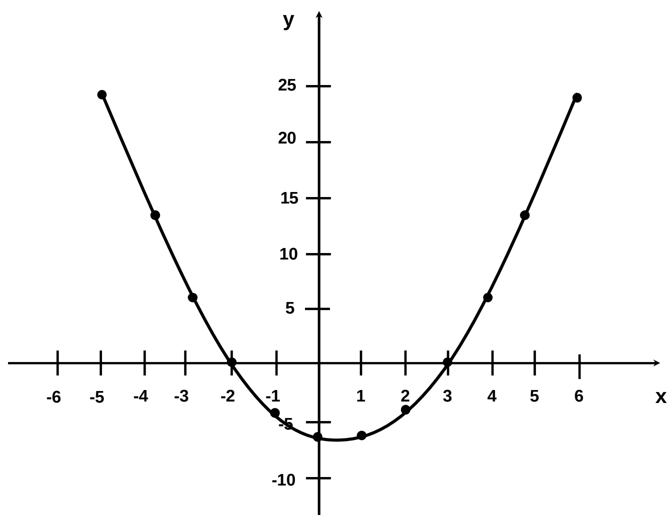
Para fines prácticos, para valores diferentes de x se pueden obtener los valores de $P(x)$, generando puntos de coordenadas $[x,P(x)]$ que se localizan en el plano coordenado y que al unirse conforman su gráfica.

La variable x recibe el nombre de *variable independiente* y a $P(x)$ se le conoce como *variable dependiente*, es decir, que está en función de la variable x.

Ejemplo.
Tabular y graficar los siguientes polinomios en los intervalos pedidos:

1) $P(x)=x^2-x-6$ en el intervalo $[-5,6]$
Solución.
Tabulando con los valores enteros del intervalo:

x	$P(x)$
-5	$(-5)^2-(-5)-6=25+5-6=24$
-4	$(-4)^2-(-4)-6=16+4-6=14$
-3	$(-3)^2-(-3)-6=9+3-6=6$
-2	$(-2)^2-(-2)-6=4+2-6=0$
-1	$(-1)^2-(-1)-6=1+1-6=-4$
0	$(0)^2-0-6=0-0-6=-6$
1	$1^2-1-6=1-1-6=-6$
2	$2^2-2-6=4-2-6=-4$
3	$3^2-3-6=9-3-6=0$
4	$4^2-4-6=16-4-6=6$
5	$5^2-5-6=25-5-6=14$
6	$6^2-6-6=36-6-6=24$

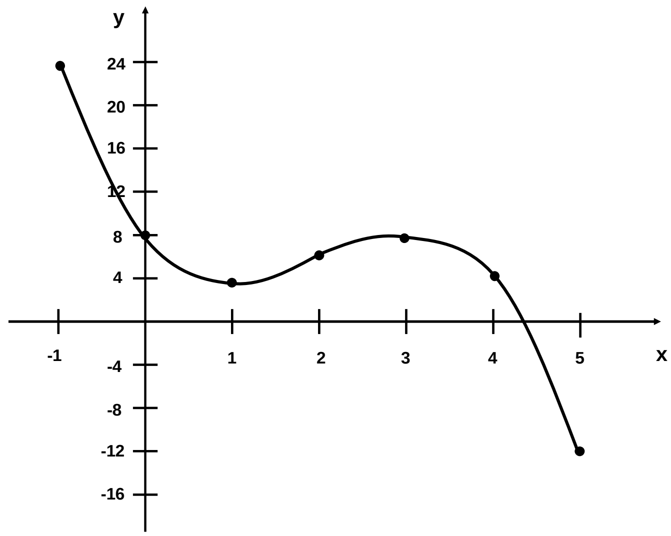


2) $P(x)=-x^3+6x^2-9x+8$ en el intervalo $[-1,5]$

Solución.

Tabulando con los valores enteros del intervalo:

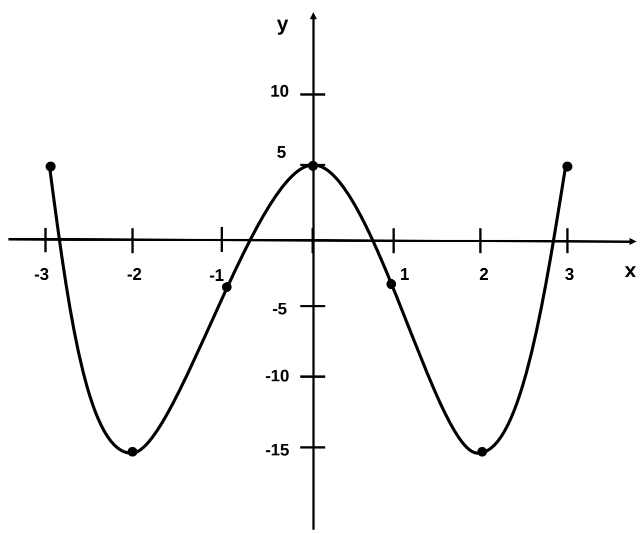
x	$P(x)$
-1	$-(-1)^3+6(-1)^2-9(-1)+8=1+6+9+8=24$
0	$0^3+6(0)^2-9(0)+8=0+0-0+8=8$
1	$-(1)^3+6(1)^2-9(1)+8=-1+6-9+8=4$
2	$-(2)^3+6(2)^2-9(2)+8=-8+24-18+8=6$
3	$-(3)^3+6(3)^2-9(3)+8=-27+54-27+8=8$
4	$-(4)^3+6(4)^2-9(4)+8=-64+96-36+8=4$
5	$-(5)^3+6(5)^2-9(5)+8=-125+150-45+8=-12$



3) $P(x) = x^4 - 9x^2 + 5$ en el intervalo $[-3, 3]$

Solución.
Tabulando con los valores enteros del intervalo:

x	$P(x)$
-3	$(-3)^4 - 9(-3)^2 + 5 = 81 - 81 + 5 = 5$
-2	$(-2)^4 - 9(-2)^2 + 5 = 16 - 36 + 5 = -15$
-1	$(-1)^4 - 9(-1)^2 + 5 = 1 - 9 + 5 = -3$
0	$(0)^4 - 9(0)^2 + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$
1	$(1)^4 - 9(1)^2 + 5 = 1 - 9 + 5 = -3$
2	$(2)^4 - 9(2)^2 + 5 = 16 - 36 + 5 = -15$
3	$(3)^4 - 9(3)^2 + 5 = 81 - 81 + 5 = 5$



4) $P(x) = -x^2 + 9$ en el intervalo $[-4,\ 4]$

Solución.

Tabulando en con los valores enteros del intervalo:

x	$P(x)$
-4	$-(-4)^2 + 9 = -16 + 9 = -7$
-3	$-(-3)^2 + 9 = -9 + 9 = 0$
-2	$-(-2)^2 + 9 = -4 + 9 = 5$
-1	$-(-1)^2 + 9 = -1 + 9 = 8$
0	$-(0)^2 + 9 = 0 + 9 = 9$
1	$-(1)^2 + 9 = -1 + 9 = 8$
2	$-(2)^2 + 9 = -4 + 9 = 5$
3	$-(3)^2 + 9 = -9 + 9 = 0$
4	$-(4)^2 + 9 = -16 + 9 = -7$