OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS Y RADICALES

UNIDAD VI

VI.1 TEOREMAS DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

Sea un polinomio en x de la forma:

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_0$ son coeficientes numéricos y $n \in \mathbf{N}$,

se dice que $c \in \mathbf{R}$ es un *cero* o *raíz*, de $P(x)$ si y sólo si $P(c)=0$. Es decir, la raíz de un polinomio es el número que toma la variable para que el valor numérico de $P(x)$ sea cero.

Ejemplos.

1) En el polinomio $P(x)=x^2-1$, sus raíces son:

$x=1$ ya que $P(1)=(1)^2-1=1-1=0$

$x=-1$ ya que $P(-1)=(-1)^2-1=1-1=0$

2) En el polinomio $P(x)=4x^2-x$, sus ceros son:

$x=0$ ya que $P(0)=4(0)^2-0=0-0=0$

$x=\frac{1}{4}$ ya que $P\left(\frac{1}{4}\right)=4\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{4}{16}-\frac{1}{4}=0$

3) En el polinomio $P(x)=x^3-5x^2+6x$, sus raíces son:

$x=0$ ya que $P(0)=0^3-5(0)^2+6(0)=0-0+0=0$

$x=2$ ya que $P(2)=2^3-5(2)^2+6(2)=8-20+12=0$

$x=3$ ya que $P(3)=3^3-5(3)^2+6(3)=27-45+18=0$

Algoritmo de la división para polinomios

Dados dos polinomios $P(x)$ (llamado dividendo) y $Q(x)$ (llamado divisor) de modo que el grado del dividendo sea mayor que el grado del divisor y $Q(x)\neq 0$.

Entonces, para $\frac{P(x)}{Q(x)}$ existen dos polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que cumplen con:

$$P(x)=Q(x)\cdot c(x)+r(x)$$

El polinomio $c(x)$ se llama *cociente* y $r(x)$ es el *residuo* de la división cuyo grado es menor que el de $P(x)$.

Sean un polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ y $a \in$ **R**.

Teorema del residuo

Si el polinomio $P(x)$ se divide por $x-a$, entonces el residuo es $P(a)$.

Demostración:
Si se divide $P(x)$ entre $x-a$ se tiene:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R$$

donde $Q(x)$ es el cociente y R es el residuo.
Si ahora se evalúa $x=a$ se obtiene:

$$P(a)=Q(a)(a-a)+R=0+R=R$$

De donde $P(a)$ es el residuo.

Ejemplo.
Sea el polinomio: $P(x)=4x^3-9x^2+5x-11$, comprobar el teorema de residuo si se divide por $x-2$.

Solución.
Dividiendo el polinomio por $x-2$:

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - x + 3 \\
\hline
x-2 & 4x^3 - 9x^2 + 5x - 11 \\
 & \underline{-4x^3 + 8x^2} \\
 & -x^2 + 5x - 11 \\
 & \underline{x^2 - 2x} \\
 & 3x - 11 \\
 & \underline{-3x + 6} \\
 & -5
\end{array}$$

ahora, evaluando para $x=2$:

$$P(2)=4(2)^3-9(2)^2+5(2)-11=32-36+10-11=-5$$

Los resultados son iguales, lo que comprueba el teorema del residuo.

Teorema del factor

Si a es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $x-a$ es un factor del polinomio. O bien, si $x-a$ es un factor de $P(x)$, entonces a es una raíz del polinomio. Esto es:

$$P(a)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-a \text{ es un factor de } P(x).$$

Demostración:
Si $x-a$ es factor de $P(x)$ entonces se cumple que: $P(x)=Q(x)(x-a)$ porque $P(a)=Q(a)(a-a)=0$ por lo tanto, a es raíz de la ecuación $P(x)=0$.

Pero si a es raíz de la ecuación $P(x)=0$, esto implica que $P(a)=0$
Si se aplica el teorema del residuo se tiene que:
$$P(x)=Q(x)(x-a)+P(a)=Q(x)(x-a)+0=Q(x)(x-a)$$
por lo tanto $x-a$ es factor de $P(x)$.

Ejemplo
Determinar si $x+2$ es factor del polinomio $P(x)=x^3+4x^2-x-10$

Solución:
Si $x+2$ es factor, $x=-2$ es raíz, entonces debe cumplir que el residuo sea cero:
$$P(-2)=(-2)^3+4(-2)^2-(-2)-10=-8+16+2-10=0$$
Por lo tanto, $x+2$ es factor del polinomio
Comprobando:
$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x-5 \\ \hline x+2 & x^3+4x^2-x-10 \\ & -x^3-2x^2 \\ \hline & 2x^2-x-10 \\ & -2x^2-4x \\ \hline & -5x-10 \\ & 5x+10 \\ \hline & 0 \end{array}$$
Por lo tanto se cumple que: $x^3+4x^2-x-10=(x^2+2x-5)(x+2)$.

División sintética

Por el teorema del residuo, si a es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $P(x)$ es divisible por $x-a$, pues el residuo de dividir $P(x)$ entre $x-a$ es cero. A cada uno de las raíces se les designa por $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$.

Esto es, dado el polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_1x+a_0$, entonces se puede factorizar como: $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$, es decir, un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces.

La principal razón de factorizar un polinomio es encontrar sus raíces. Generalmente, para reconocer las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros se tiene en cuenta que éstas son divisores del término independiente. Así, las raíces enteras del polinomio $P(x)=x^4-6x^3+9x^2+4x-12$ están entre los divisores de 12. Por lo tanto, pueden ser raíces de $P(x)$ los números $1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,12$ y -12.

En el polinomio anterior, si se prueba para $x=1$:
$P(1)=(1)^4-6(1)^3+9(1)^2+4(1)-12=1-6+9+4-12=-4$, puesto que el residuo es distinto de cero, se concluye que $P(x)$ no es divisible por $x-1$.

Ahora, si se prueba para $x=-1$:

$P(-1)=(-1)^4-6(-1)^3+9(-1)^2+4(-1)-12=1+6+9-4-12=0$, puesto que el residuo es cero, se concluye que $P(x)$ es divisible por $x+1$.

Para descomponerlo en factores se prueba sucesivamente por todas ellas aplicando un algoritmo llamado *Regla de Ruffini* que aplica el teorema del residuo verificando cual de estos valores da como residuo cero. Este es un procedimiento que permite hallar el cociente y el residuo sin efectuar la secuencia descrita anteriormente. Esta regla aplica sólo si el divisor es un polinomio de la forma $x-a$.

En general, la división sintética es un procedimiento abreviado para realizar la división de un polinomio de la forma $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_1x+a_0$ entre un polinomio lineal expresado como $x-a$ y sólo sirve para obtener las raíces enteras.

La metodología para encontrar las raíces enteras de un polinomio mediante la división sintética es la siguiente:

- La disposición práctica requiere que en un primer renglón se escriban los coeficientes del dividendo ordenado de forma descendente y completo hasta el término independiente. A la izquierda de una línea vertical se escribe un valor de prueba como probable raíz, que como ya se mencionó es un divisor de a_0.
- El primer coeficiente del dividendo se copia abajo en una tercera fila en la misma columna. Se multiplica el valor de prueba por el primer coeficiente de la tercera fila y el resultado se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo.
- Se suman los coeficientes de la segunda columna y el resultado se escribe en la tercera fila.
- El resultado obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se multiplica por el valor de prueba y el resultado se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo. Nuevamente se suman los coeficientes de la tercera columna y el resultado se escribe en la tercera fila
- El proceso continúa hasta que se obtenga el resultado de la última columna. Este valor es el residuo. Si es cero entonces el valor de prueba es una raíz del polinomio
- De no ser una raíz, se repite la metodología con otro valor de prueba hasta encontrar un valor cuyo residuo sea cero.
- Cuando el residuo es cero, los valores de la tercera fila representan los coeficientes del polinomio reducido y se efectúa el mismo procedimiento con estos coeficientes hasta que se llegue a un polinomio de grado uno, a fin de que se pueda despejar x para obtener la última raíz.

Ejemplo.
Encontrar las raíces enteras de los siguientes polinomios:

1) $x^2-x-6=0$
Solución.
Las posibles raíces son: $1,-1,2,-2,3,-3,6$ y -6
Probando con $x=1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -6 \\ 1 & & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -6 \end{array}$$

Por lo tanto, no es raíz.
Probando con $x=-3$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -6 \\ -3 & & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 6 \end{array}$$

Por lo tanto, no es raíz.
Probando con $x=3$:

$$\begin{array}{c|rrr} & 1 & -1 & -6 \\ 3 & & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1 = 3$
El polinomio reducido que queda es: $x+2=0$
despejando se tiene la segunda raíz: $x_2 = -2$

2) $2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 = 0$
Solución.
Las posibles raíces son: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12, 24$ y -24.
Probando con $x=-4$:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 2 & -4 & -22 & 24 \\ -4 & & -8 & 48 & -104 \\ \hline & 2 & -12 & 26 & -80 \end{array}$$

Por lo tanto, no es raíz.
Probando con $x=1$:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 2 & -4 & -22 & 24 \\ 1 & & 2 & -2 & -24 \\ \hline & 2 & -2 & -24 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1 = 1$
Trabajando ahora con el polinomio reducido:
Probando con $x=2$:

$$\begin{array}{c|rrr} & 2 & -2 & -24 \\ 2 & & 4 & 4 \\ \hline & 2 & 2 & -20 \end{array}$$

Por lo tanto, no es raíz.
Probando con $x=4$:

$$\begin{array}{c|rrr} & 2 & -2 & -24 \\ 4 & & 8 & 24 \\ \hline & 2 & 6 & 0 \end{array}$$

La segunda raíz es $x_2 = 4$
El polinomio reducido que queda es: $2x+6=0$
despejando se tiene la tercera raíz: $x_3 = -3$

3) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$
Solución.
Las posibles raíces son: $1, -1, 3, -3, 5, -5, 15$ y -15.
Probando con $x=-1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -13 & 15 \\ -1 & & -1 & 4 & 9 \\ \hline & 1 & -4 & -9 & 24 \end{array}$$

Por lo tanto, no es raíz.
Probando con $x=3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -13 & 15 \\ 3 & & 3 & 0 & -39 \\ \hline & 1 & 0 & -13 & -24 \end{array}$$

Por lo tanto, no es raíz.
Probando con $x=5$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -13 & 15 \\ 5 & & 5 & 10 & -15 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1=5$
Por lo tanto, no es raíz.
Probando con $x=1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

La segunda raíz es $x_2=1$
El polinomio reducido que queda es: $x+3=0$
despejando se tiene la tercera raíz: $x_3=-3$

4) $2x^4+4x^3-26x^2-28x+48=0$
Solución.
Las posibles raíces son: $1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,8,-8,12,-12,16,-16,24,-24,48$ y -48.
Probando con $x=1$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 4 & -26 & -28 & 48 \\ 1 & & 2 & 6 & -20 & -48 \\ \hline & 2 & 6 & -20 & -48 & 0 \end{array}$$

La primera raíz es $x_1=1$
Trabajando ahora con el polinomio reducido:
Probando con $x=2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -20 & -48 \\ 2 & & 4 & 20 & 0 \\ \hline & 2 & 10 & 0 & -48 \end{array}$$

Por lo tanto, no es raíz.
Probando con $x=3$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 6 & -20 & -48 \\ 3 & & 6 & 36 & 48 \\ \hline & 2 & 12 & 16 & 0 \end{array}$$

La segunda raíz es $x_2 = 3$
Trabajando ahora con el polinomio reducido:
Probando con $x = -1$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 12 & 16 \\ -1 & & -2 & -10 \\ \hline & 2 & 10 & 6 \end{array}$$

Por lo tanto, no es raíz.
Probando con $x = -4$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 12 & 16 \\ -4 & & -8 & -16 \\ \hline & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

La tercera raíz es $x_3 = -4$
El polinomio reducido que queda es: $2x + 4 = 0$
despejando se tiene la cuarta raíz: $x_4 = -2$

VI.2 OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una *expresión algebraica racional* es el cociente de dos polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Las expresiones racionales tienen las mismas propiedades que los números racionales. Como no se puede dividir por cero, las sustituciones de variables que hacen que el denominador sea cero no son aceptables.

Ejemplos.

1) En la expresión racional $\frac{3x^2 + 5x - 7}{x}$, x no puede ser 0

2) En la expresión racional $\frac{x}{x+2}$, x no puede ser -2

3) En la expresión racional $\frac{4}{x-y}$, x no puede ser igual a y.

Una expresión racional está en su *mínima expresión* cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes de 1 y -1

Ejemplos.

1) La fracción $\frac{x+6}{5x}$ es su mínima expresión ya que ni 5 ni x son factores de $x+6$

2) La fracción $\frac{7(x-2)}{x(x-2)}$ no es su mínima expresión ya que $x-2$ es un factor común del numerador y del denominador.

Para simplificar expresiones racionales, se procede de forma similar a cuando se simplifican números racionales, es decir, se factoriza el numerador y el denominador. Los factores se simplifican hasta 1. La expresión simplificada es igual a la no simplificada excepto para aquellos valores en los que el factor que se cancele sea igual a cero.

Ejemplos.
Simplificar las siguientes expresiones racionales:

1) $\frac{4x-8}{4x}$

$$\frac{4x-8}{4x}=\frac{4(x-2)}{4x}=\frac{x-2}{x}$$

2) $\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

$$\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x-1}{x+2}$$

3) $\frac{5-2x}{6x-15}$

$$\frac{5-2x}{6x-15}=\frac{5-2x}{3(2x-5)}=\frac{-1(2x-5)}{3(2x-5)}=-\frac{1}{3}$$

4) $\frac{2x^2-12x-14}{4x^2+8x+4}$

$$\frac{2x^2-12x-14}{4x^2+8x+4}=\frac{2(x^2-6x-7)}{4(x^2+2x+1)}=\frac{2(x+1)(x-7)}{4(x+1)(x+1)}=\frac{x-7}{2(x+1)}$$

5) $\frac{(3x^2-12y^2)(x^2-2xy+y^2)}{(x-y)^2(6x+12y)}$

$$\frac{(3x^2-12y^2)(x^2-2xy+y^2)}{(x-y)^2(6x+12y)}=\frac{3(x^2-4y^2)(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+2y)}=\frac{3(x+2y)(x-2y)}{6(x+2y)}=\frac{3(x-2y)}{6}$$
$$=\frac{x-2y}{2}$$

6) $\frac{x^2-2x}{x}$

En esta expresión racional x no puede ser 0, y como es el factor que se cancela entonces se cumple que:

$$\frac{x^2-2x}{x}=\frac{x(x-2)}{x}=x-2 \text{ porque } x\neq 0.$$

Para sumar fracciones se efectúa el mismo procedimiento que se emplea cuando se suman números racionales. En general:

- Se reducen las fracciones lo más posible.
- Se descomponen los denominadores
- Se halla el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores, obteniendo así el denominador común.
- Para hallar el numerador resultante, se divide el MCM por el denominador y se multiplica el cociente obtenido por el numerador correspondiente, esto convierte al numerador en un polinomio que debe descomponerse en factores para finalmente simplificar.

Ejemplos.
Efectuar las operaciones algebraicas siguientes:

1) $\frac{x-2}{4}+\frac{3x+2}{6}$
Solución.
Se obtiene el MCM de los denominadores: 12:
$$=\frac{3(x-2)+2(3x+2)}{12}=\frac{3x-6+6x+4}{12}=\frac{9x-2}{12}$$
$$\therefore \quad \frac{x-2}{4}+\frac{3x+2}{6}=\frac{9x-2}{12}$$

2) $\frac{x-y}{12}+\frac{2x+y}{15}+\frac{y-4x}{30}$
Solución.
Se obtiene el MCM de los denominadores: 60:
$$\frac{5(x-y)+4(2x+y)+2(y-4x)}{60}$$
reduciendo:
$$\frac{5x-5y+8x+4y+2y-8x}{60}=\frac{5x+y}{60}$$
$$\therefore \quad \frac{x-y}{12}+\frac{2x+y}{15}+\frac{y-4x}{30}=\frac{5x+y}{60}$$

3) $\frac{2a}{a+3}+\frac{5a}{a-3}+\frac{12a}{a^2-9}$
Solución.
Se descompone el tercer denominador en sus factores:
$$=\frac{2a}{a+3}+\frac{5a}{a-3}+\frac{12a}{(a+3)(a-3)}$$
se obtiene el MCM de los denominadores: $(a+3)(a-3)$:
$$=\frac{(a-3)2a+(a+3)5a+12a}{(a+3)(a-3)}$$
eliminando paréntesis:
$$=\frac{2a^2-6a+5a^2+15a+12a}{(a+3)(a-3)}=\frac{7a^2+21a}{(a+3)(a-3)}$$

factorizando:

$$=\frac{7a(a+3)}{(a+3)(a-3)}=\frac{7a}{a-3}$$

$$\therefore\quad \frac{2a}{a+3}+\frac{5a}{a-3}+\frac{12a}{a^2-9}=\frac{7a}{a-3}$$

4) $\frac{x+2}{x^2-4}+\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+3}{x^2+6x+9}$

Solución.

Se descomponen los denominadores en sus factores:

$$=\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}+\frac{x+3}{(x+3)^2}$$

reduciendo:

$$=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}$$

se obtiene el MCM de los denominadores: $(x-2)(x+3)$:

$$\frac{(x+3)+(x-2)+(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

eliminando paréntesis:

$$\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}$$

$$\therefore\quad \frac{x+2}{x^2-4}+\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+3}{x^2+6x+9}=\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}$$

5) $\frac{a+5}{a^2+7a+10}+\frac{a-3}{a^2-a-6}+\frac{a+1}{a^2+3a+2}$

Solución.

Se descomponen los denominadores en sus factores:

$$=\frac{a+5}{(a+5)(a+2)}+\frac{a-3}{(a-3)(a+2)}+\frac{a+1}{(a+1)(a+2)}$$

reduciendo:

$$=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2}=\frac{3}{a+2}$$

$$\therefore\quad \frac{a+5}{a^2+7a+10}+\frac{a-3}{a^2-a-6}+\frac{a+1}{a^2+3a+2}=\frac{3}{a+2}$$

6) $\frac{x}{x^2+x}-\frac{1-x^2}{x^2-1}$

Solución.

Se descomponen los denominadores en sus factores:

$$=\frac{x}{x(x+1)}-\frac{1-x^2}{(x+1)(x-1)}$$

se obtiene el MCM de los denominadores: $x(x+1)(x-1)$:

$$=\frac{x(x-1)-(1-x^2)x}{x(x+1)(x-1)}$$

eliminando los paréntesis y ordenando:

$$=\frac{x^2-x-x+x^3}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-2x+x^3}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x^3+x^2-2x}{x(x+1)(x-1)}$$

factorizando el numerador y simplificando:

$$=\frac{x(x^2+x-2)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x+2}{x+1}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{x^2+x}-\frac{1-x^2}{x^2-1}=\frac{x+2}{x+1}$$

7) $\dfrac{x+y}{2x-2y}+\dfrac{x^2-y^2}{6x-6y}$

Solución.

Se descomponen los denominadores en sus factores:

$$=\frac{x-y}{2(x-y)}+\frac{x^2-y^2}{6(x-y)}$$

se obtiene el MCM de los denominadores: $6(x-y)$:

$$=\frac{3(x-y)+(x^2-y^2)}{6(x-y)}$$

factorizando el numerador y simplificando:

$$=\frac{3(x-y)+(x+y)(x-y)}{6(x-y)}=\frac{(x-y)(3+x+y)}{6(x-y)}=\frac{3+x+y}{6}$$

$$\therefore \quad \frac{x+y}{2x-2y}+\frac{x^2-y^2}{6x-6y}=\frac{3+x+y}{6}$$

Para multiplicar expresiones racionales se procede de forma similar que con los números racionales.

Ejemplos.

Multiplicar las siguientes expresiones algebraicas:

1) $\left(\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-4x+4}\right)\left(\dfrac{x-2}{x-5}\right)$

Solución.

Se descompone la fracción en sus factores:

$$\left(\frac{x^2-3x-10}{x^2-4x+4}\right)\left(\frac{x-2}{x-5}\right)=\frac{(x-5)(x+2)}{(x-2)(x-2)}\cdot\frac{x-2}{x-5}$$

simplificando:

$$=\frac{x+2}{x-2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-3x-10}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x-2}{x-5}=\frac{x+2}{x-2}$$

2) $\dfrac{2y^2-10y+12}{y^2-y-6}\left(y^2+4y+4\right)$

Solución.

Se descompone la fracción en sus factores:

$$=\frac{2\left(y^2-5y+6\right)}{(y-3)(y+2)}\left(y^2+4y+4\right)=\frac{2(y-3)(y-2)}{(y-3)(y+2)}\left(y^2+4y+4\right)$$

factorizando el trinomio:

$$\frac{2(y-3)(y-2)}{(y-3)(y+2)}(y+2)(y+2)$$

simplificando:

$$=2(y-2)(y+2)$$

$$\therefore\quad \frac{2y^2-10y+12}{y^2-y-6}\left(y^2+4y+4\right)=2(y-2)(y+2)$$

3) $\left(\dfrac{6x^2+12xy+6y^2}{(x+y)^2}\right)\left(\dfrac{x^2-y^2}{2x+2y}\right)$

Solución.

Tomando como factor común al 6 en el numerador de la primera fracción y al 2 en el denominador de la segunda:

$$=\left(\frac{6\left(x^2+2xy+y^2\right)}{(x+y)^2}\right)\left(\frac{x^2-y^2}{2(x+y)}\right)$$

factorizando:

$$=\left(\frac{6(x+y)^2}{(x+y)^2}\right)\left(\frac{(x+y)(x-y)}{2(x+y)}\right)$$

simplificando:

$$=3(x-y)$$

$$\therefore\quad \left(\frac{6x^2+12xy+6y^2}{(x+y)^2}\right)\left(\frac{x^2-y^2}{2x+2y}\right)=3(x-y)$$

4) $\left(\dfrac{32-8a}{a^2+3a-10}\right)\left(\dfrac{a^2+10a+25}{2a^2-22a+56}\right)\left(\dfrac{a^2-9a+14}{a+5}\right)$

Solución.

Tomando como factor común al -8 en el numerador de la primera fracción y al 2 en el denominador de la segunda:

$$=\left(\frac{-8(a-4)}{a^2+3a-10}\right)\left(\frac{a^2+10a+25}{2\left(a^2-11a+28\right)}\right)\left(\frac{a^2-9a+14}{a+5}\right)$$

factorizando:

$$=\left(\frac{-8(a-4)}{(a+5)(a-2)}\right)\left(\frac{(a+5)(a+5)}{2(a-7)(a-4)}\right)\left(\frac{(a-2)(a-7)}{a+5}\right)$$

simplificando:

$$=\frac{-8}{2}=-4$$

$$\therefore \quad \left(\frac{32-8a}{a^2+3a-10}\right)\left(\frac{a^2+10a+25}{2a^2-22a+56}\right)\left(\frac{a^2-9a+14}{a+5}\right)=-4$$

Para dividir expresiones racionales se procede de la misma forma que se efectúa con los números racionales. Para dividir expresiones racionales, se multiplica la primera expresión por el recíproco del divisor.

Ejemplos.
Dividir las siguientes expresiones algebraicas:

1) $\dfrac{\dfrac{15x^4}{3}}{\dfrac{5x^2}{6}}$

Solución.
Simplificando:

$$\frac{15x^4(6)}{3(5x^2)}=\frac{90x^4}{15x^2}=6x^2$$

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{15x^4}{3}}{\dfrac{5x^2}{6}}=6x^2$$

2) $\dfrac{\dfrac{3x+3}{x^2-1}}{\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}}$

Solución.
Factorizando las fracciones al máximo:

$$\frac{\dfrac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{x+1}{(x-1)(x-1)}}$$

simplificando:

$$=\frac{3(x+1)(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+1)}=\frac{3(x-1)}{x+1}$$

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{3x+3}{x^2-1}}{\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}}=\frac{3(x-1)}{x+1}$$

3) $\dfrac{\dfrac{20x^2-30x}{15x^3+15x^2}}{\dfrac{4x-6}{x+1}}$

Solución.

Factorizando las fracciones al máximo:

$$=\frac{\dfrac{10x(2x-3)}{15x^2(x+1)}}{\dfrac{2(2x-3)}{x+1}}$$

simplificando:

$$=\frac{10x(2x-3)(x+1)}{15x^2(x+1)2(2x-3)}=\frac{10x}{30x^2}=\frac{1}{3x}$$

4) $\dfrac{\dfrac{a}{a+x}-\dfrac{a}{2a+2x}}{\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{a}{a+x}}$

Solución.

El MCM de $a+x$ y de $2a+2x$ es: $2a+2x$, por su parte, el MCM de $a-x$ y $a+x$ es: $(a-x)(a+x)$, por lo que escribiendo la expresión como el cociente de dos fracciones se tiene:

$$=\frac{\dfrac{2a-a}{2a+2x}}{\dfrac{(a+x)a+a(a-x)}{(a-x)(a+x)}}$$

reduciendo:

$$=\frac{\dfrac{a}{2a+2x}}{\dfrac{a^2+ax+a^2-ax}{(a-x)(a+x)}}=\frac{\dfrac{a}{2a+2x}}{\dfrac{2a^2}{(a-x)(a+x)}}$$

factorizando:

$$=\frac{\dfrac{a}{2(a+x)}}{\dfrac{2a^2}{(a-x)(a+x)}}=\frac{a(a-x)(a+x)}{2(a+x)2a^2}$$

simplificando:

$$=\frac{(a-x)}{4a}$$

$$\therefore\quad \frac{\dfrac{a}{a+x}-\dfrac{a}{2a+2x}}{\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{a}{a+x}}=\frac{a-x}{4a}$$

VI.3 OPERACIONES CON RADICALES

Un *radical* es cualquier raíz indicada de una expresión. La radicación es la operación inversa de la potenciación y se representa por el símbolo $\sqrt[n]{\ }$, donde n es el índice del radical y dentro se ubica una expresión denominada *subradical*.

Para resolver una raíz, se busca una cantidad que elevada a un exponente igual al índice del radical sea igual al subradical.

El radical puede ser *racional* si la raíz indicada es exacta o *irracional* si no lo es.

Ejemplos.

1) El subradical de la expresión $\sqrt{5x+3}$ es $5x+3$
2) $\sqrt{16x^2}$ es un radical racional porque su resultado, $4x$, es exacto.
3) $\sqrt[3]{17x^4}$ es un radical irracional porque su resultado no es exacto.
5) $\sqrt[4]{6c-4d}$ es un radical de cuarto grado

En los radicales de segundo grado se omite su índice, esto es: $\sqrt{a}=\sqrt[2]{a}$.

Si $a^n=b$, a es una raíz enésima de b.

Ejemplos

1) Si $3^2=9$ entonces 3 es una raíz cuadrada de 9
2) Si $5^4=625$ entonces 5 es una raíz cuarta de 625

Si n es par, $a^n \geq 0$, por lo que un número negativo no puede tener raíz enésima .

Ejemplos

1) Si $\sqrt{-16}$ no tiene raíz cuadrada en **R**.
2) Si $\sqrt[6]{-64}$ no tiene raíz sexta en **R**.

Si n es par y $b=a^n$, también $b=(-a)^n$, así que b tiene dos raíces enésimas, a y $-a$.

Ejemplos

1) Como $5^2=25$ y $(-5)^2=25$, 5 y -5 son raíces cuadradas de 25.
2) Como $3^4=81$ y $(-3)^4=81$, 3 y -3 son raíces cuartas de 25.

Si n es impar, todo número real tiene exactamente una raíz enésima.

Ejemplos

1) $\sqrt[3]{216}=6$.
2) $\sqrt[5]{-32}=-2$

Si $b \geq 0$, hay una única raíz enésima no negativa de b representada por $\sqrt[n]{b}$

Ejemplo.
Si $49 = 7^2$, entonces 7 es una raíz cuadrada de 49 y como $49 = (-7)^2$, -7 es otra raíz cuadrada de 49. Pero $\sqrt{49}$ denota exclusivamente a la raíz no negativa de 49.

Si $x \geq 0,\ m, n \in \mathbf{N}$, a ley de exponentes fraccionarios establece que:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Esto es, cualquier expresión elevada a un exponente fraccionario es igual a una raíz cuyo índice es el denominador y el subradical es la misma expresión elevada a la potencia que tiene el numerador.

En el caso particular, si $m = n$, se tiene que: $x = \sqrt[n]{x^n}$

Los radicales cumplen con las siguientes propiedades:

1) El producto de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del producto de los subradicales. Esto es: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ si $a > 0,\ b > 0,\ n \in \mathbf{N}$.
2) El cociente de dos radicales de un mismo índice es igual a la raíz del cociente de los subradicales. Esto es: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ si $a > 0,\ b > 0,\ n \in \mathbf{N}$.
3) Un radical de índice n elevado a una potencia m equivale a una raíz de índice n y de subradical elevado a la potencia m. Esto es: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ si $a > 0,\ m, n \in \mathbf{N}$.
4) La raíz de índice m de un radical de índice n es equivalente a una raíz de índice n de un radical de índice m y es igual a una raíz de índice $m \cdot n$. Esto es: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ si $a > 0,\ m, n \in \mathbf{N}$.

Es importante notar que la suma algebraica de dos radicales de cualquier índice no es igual a la raíz de la suma algebraica de los subradicales. Es decir: $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \pm b}$

De acuerdo con la ley de exponentes fraccionarios y de las propiedades de los radicales, el objetivo de simplificar un radical es expresarlo en su forma más simple. Es decir, un radical está simplificado cuando:

- No se puede extraer ningún factor del radicando (es el menor posible).
- No puede reducirse su índice (es el menor posible).
- El radicando no es una fracción.
- No hay radicales en el denominador de una fracción.

VI.3.1 SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES A TRAVÉS DE LA EXTRACCIÓN DE FACTORES DEL SUBRADICAL

Un radical se puede simplificar cuando contiene factores cuyos exponentes son divisibles por el índice y se procede de la siguiente manera:

- La parte numérica del subradical se descompone en factores de tal forma que sean potencias con exponentes múltiplos del índice de la raíz, a fin de poder extraer del radical.
- La parte literal del subradical se descompone de tal manera que se exprese la mayor parte posible con exponentes múltiplos del índice de la raíz.

Ejemplos.

1) $\sqrt{18a^5}=\sqrt{9\cdot 2\cdot a^4\cdot a}=\sqrt{3^2\cdot 2\cdot a^4\cdot a}=3a^2\sqrt{2a}$

2) $\sqrt[4]{243k^7}=\sqrt[4]{81\cdot 3\cdot k^4\cdot k^3}=\sqrt[4]{3^4\cdot 3\cdot k^4\cdot k^3}=3k\sqrt[4]{3k^3}$

3) $\sqrt[3]{500x^5y^7}=\sqrt[3]{125\cdot 4\cdot x^3\cdot x^2\cdot y^6\cdot y}=\sqrt[3]{5^3\cdot 4\cdot x^3\cdot x^2\cdot y^6\cdot y}=5xy^2\sqrt[3]{4x^2y}$

4) $\sqrt[5]{64v^8w^6z^9}=\sqrt[5]{32\cdot 2\cdot v^8\cdot w^6\cdot z^9}=\sqrt[5]{2^5\cdot 2\cdot v^5\cdot v^3\cdot w^5\cdot w\cdot z^5\cdot z^4}=2vwz\sqrt[5]{2v^3wz^4}$

5) $\sqrt{4a^4-8a^3b}=\sqrt{4a^2\left(a^2-2ab\right)}=\sqrt{2^2a^2\left(a^2-2ab\right)}=2a\sqrt{a^2-2ab}$

6) $\sqrt{2am^2+4amn+2an^2}=\sqrt{2a\left(m^2+2mn+n^2\right)}=\sqrt{2a(m+n)^2}=\sqrt{2a}\,(m+n)$

7) $\sqrt[3]{\dfrac{729a^4}{16b^5}}=\sqrt[3]{\dfrac{729\cdot a^3\cdot a}{8\cdot 2\cdot b^3\cdot b^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{3^6\cdot a^3\cdot a}{2^3\cdot 2\cdot b^3\cdot b^2}}=\dfrac{3^2a}{2b}\sqrt[3]{\dfrac{a}{2b^2}}=\dfrac{9a}{2b}\sqrt[3]{\dfrac{a}{2b^2}}$

8) $\sqrt{44a^3b^7c^9}=\sqrt{4\cdot 11\cdot a^2\cdot a\cdot b^6\cdot b\cdot c^8\cdot c}=\sqrt{2^2\cdot 11\cdot a^2\cdot a\cdot b^6\cdot b\cdot c^8\cdot c}=2ab^3c^4\sqrt{11abc}$

VI.3.2 INCLUSIÓN DE UN FACTOR EN UN SUBRADICAL

En este caso se eleva la expresión por introducir a la potencia que indique el índice del radical, se efectúa el producto de subradicales y el resultado se expresa con el mismo índice.

Ejemplos.

1) $4\sqrt{5}=\sqrt{4^2}\sqrt{5}=\sqrt{16}\sqrt{5}=\sqrt{80}$

2) $2a\sqrt{3a}=\sqrt{(2a)^2}\sqrt{3a}=\sqrt{4a^2}\sqrt{3a}=\sqrt{12a^3}$

3) $5\alpha\sqrt{\beta}=\sqrt{(5\alpha)^2}\sqrt{\beta}=\sqrt{25\alpha^2}\sqrt{\beta}=\sqrt{25\alpha^2\beta}$

4) $\dfrac{1}{3}\sqrt{18}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}\sqrt{18}=\sqrt{\dfrac{1}{9}}\sqrt{18}=\sqrt{2}$

5) $(x+y)\sqrt{\dfrac{x}{x+y}}=\sqrt{(x+y)^2}\sqrt{\dfrac{x}{x+y}}=\sqrt{\dfrac{(x+y)^2x}{x+y}}=\sqrt{(x+y)x}=\sqrt{x^2+xy}$

6) $4w\sqrt[3]{2w^2}=\sqrt[3]{(4w)^3}\sqrt[3]{2w^2}=\sqrt[3]{64w^3}\sqrt[3]{2w^2}=\sqrt[3]{128w^5}$

7) $2a\sqrt[4]{6ab^3}=\sqrt[4]{(2a)^4}\sqrt[4]{6ab^3}=\sqrt[4]{16a^4}\sqrt[4]{6ab^3}=\sqrt[4]{96a^5b^3}$

8) $3k^2m\sqrt[5]{\dfrac{k^3}{27m^4}}=\sqrt[5]{\left(3k^2m\right)^5}\sqrt[5]{\dfrac{k^3}{27m^4}}=\sqrt[5]{243k^{10}m^5}\sqrt[5]{\dfrac{k^3}{27m^4}}=\sqrt[5]{9k^{13}m}$

VI.3.3 EXPRESAR UN RADICAL COMO UNO DE ÍNDICE MENOR

Otra forma de simplificación de un radical consiste en transformarlo a uno equivalente que posea un índice menor. Para ello, se expresa cada uno de los factores del subradical en su forma de exponente fraccionario, se simplifican las fracciones y se vuelve a transformar a radical.

Ejemplos.

1) $\sqrt[4]{x^2}=x^{\frac{2}{4}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

2) $\sqrt[8]{k^6} = \left(k^6\right)^{\frac{1}{8}} = k^{\frac{6}{8}} = k^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{k^3}$

3) $\sqrt[12]{216} = \left(6^3\right)^{\frac{1}{12}} = 6^{\frac{3}{12}} = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$

4) $\sqrt[6]{m^2n^2} = \left(m^2 \cdot n^2\right)^{\frac{1}{6}} = m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{mn}$

5) $\sqrt[10]{\dfrac{a^5}{32}} = \left(\dfrac{a^5}{2^5}\right)^{\frac{1}{10}} = \dfrac{a^{\frac{5}{10}}}{2^{\frac{5}{10}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{a}{2}}$

6) $\sqrt[4]{25e^2h^2} = \left(5^2 \cdot e^2 \cdot h^2\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{2}{4}} \cdot e^{\frac{2}{4}} \cdot h^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5eh}$

7) $\sqrt[9]{64\alpha^6\beta^6} = \left(2^6 \cdot \alpha^6 \cdot \beta^6\right)^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{6}{9}}\alpha^{\frac{6}{9}}\beta^{\frac{6}{9}} = 2^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4\alpha^2\beta^2}$

8) $\sqrt[8]{16x^2y^4} = \left(2^4 \cdot x^2 \cdot y^4\right)^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{4}{8}}x^{\frac{2}{8}}y^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{2}{4}}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{4xy^2}$

VI.3.4 OPERACIONES CON RADICALES DEL MÍSMO ÍNDICE.

Radicales semejantes son aquellos que tienen igual radicando y el mismo índice, es decir, sólo difieren por el coeficiente.

Ejemplos.

1) $4\sqrt{x}$ y $9\sqrt{x}$ son radicales semejantes

2) $-6\sqrt[3]{ab^2}$ y $\dfrac{5}{4}\sqrt[3]{ab^2}$ son radicales semejantes

3) $8\sqrt{x}$ y $7\sqrt[3]{x}$ no son radicales semejantes

Para sumar o restar radicales se simplifican a su forma más elemental y se reducen los radicales semejantes.

Ejemplos.

1) $\sqrt{80} + \sqrt{20} = \sqrt{16 \cdot 5} + \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

2) $\sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20} = \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$
$= \sqrt{5} - 3\sqrt{3}$

3) $\sqrt{175} + \sqrt{243} - \sqrt{63} - 2\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 7} + \sqrt{81 \cdot 3} - \sqrt{9 \cdot 7} - 2\sqrt{25 \cdot 3}$
$= \sqrt{5^2 \cdot 7} + \sqrt{9^2 \cdot 3} - \sqrt{3^2 \cdot 7} - 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{7} + 9\sqrt{3} - 3\sqrt{7} - 2 \cdot 5\sqrt{3} = 5\sqrt{7} + 9\sqrt{3} - 3\sqrt{7} - 10\sqrt{3}$
$= 2\sqrt{7} - \sqrt{3}$

4) $\sqrt{75} + \sqrt{12} - \sqrt{147} = \sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{7^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 0$

5) $7\sqrt{450} - 4\sqrt{320} + 3\sqrt{80} - 5\sqrt{800} = 7\sqrt{25 \cdot 9 \cdot 2} - 4\sqrt{16 \cdot 5 \cdot 4} + 3\sqrt{16 \cdot 5} - 5\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 2}$
$= 7\sqrt{5^2 \cdot 3^2 \cdot 2} - 4\sqrt{4^2 \cdot 5 \cdot 2^2} + 3\sqrt{4^2 \cdot 5} - 5\sqrt{5^2 \cdot 4^2 \cdot 2} = 7 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2} - 4 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{5} + 3 \cdot 4\sqrt{5} - 5 \cdot 5 \cdot 4\sqrt{2}$
$= 105\sqrt{2} - 32\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 100\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 20\sqrt{5}$

6) $\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{72} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{6^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$
$= 3\sqrt{2}$

7) $\sqrt{162}+\sqrt{50}-\sqrt{200}=\sqrt{81\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{100\cdot 2}=\sqrt{9^2\cdot 2}+\sqrt{5^2\cdot 2}-\sqrt{10^2\cdot 2}$
$=9\sqrt{2}+5\sqrt{2}-10\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

8) $9\sqrt{48}-5\sqrt{27}+3\sqrt{12}=9\sqrt{16\cdot 3}-5\sqrt{9\cdot 3}+3\sqrt{4\cdot 3}=9\sqrt{4^2\cdot 3}-5\sqrt{3^2\cdot 2}+3\sqrt{2^2\cdot 3}$
$=9\cdot 4\sqrt{3}-5\cdot 3\sqrt{3}+3\cdot 2\sqrt{3}=36\sqrt{3}-15\sqrt{3}+6\sqrt{3}=27\sqrt{3}$

Para efectuar la multiplicación de radicales se multiplican respectivamente los coeficientes y los subradicales, ubicando este último producto bajo el signo de radical y se simplifica.

Ejemplos.

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$

2) $5\sqrt{21}\cdot 2\sqrt{3}=10\sqrt{63}=10\sqrt{3^2\cdot 7}=10\cdot 3\sqrt{7}=30\sqrt{7}$

3) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{9a^2}\cdot 8\sqrt[3]{3ab}=\frac{24}{4}\sqrt[3]{27a^3b}=6\cdot 3a\sqrt[3]{b}=18a\sqrt[3]{b}$

4) $3\sqrt[3]{45}\cdot\frac{1}{6}\sqrt[3]{15}\cdot 4\sqrt[3]{20}=2\sqrt[3]{13{,}500}=2\sqrt[3]{5^3\cdot 3^3\cdot 4}=2\cdot 5\cdot 3\sqrt[3]{4}=30\sqrt[3]{4}$

Para dividir dos radicales, se dividen respectivamente los coeficientes y los subradicales, ubicando este último cociente bajo el signo de radical y se simplifica.

Ejemplos.

1) $\frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$

2) $\frac{2\sqrt{3a}}{10\sqrt{a}}=\frac{1}{5}\sqrt{3}$

3) $\frac{3\sqrt[3]{16k^5}}{4\sqrt[3]{2k^2}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{8k^3}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{2^3k^3}=\frac{3}{4}\cdot 2\cdot k=\frac{6}{4}k=\frac{3}{2}k$

4) $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{36xy^8}}{\frac{3}{4}\sqrt{4xy^5}}=\frac{4}{6}\sqrt{9y^3}=\frac{4}{6}\sqrt{3^2y^2\cdot y}=\frac{4}{6}\cdot 3y\sqrt{y}=2y\sqrt{y}$

VI.3.5 SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES DE ÍNDICE DIFERENTE

Los radicales no semejantes no se pueden reducir, por lo que la suma y la resta no son posibles.

Para multiplicar dos radicales de diferente índice:

- Se halla el MCM de los índices.
- El MCM se divide entre cada índice de la raíz y cada radicando se eleva a este resultado.
- Se resuelven los radicandos como potencia de otra potencia, es decir multiplicando los exponentes.
- Se multiplican los radicandos como potencias de la misma base, es decir sumando los exponentes.
- El radicando se descompone en factores procurando que sean potencias con exponentes múltiplos del índice de la raíz, a fin de poder extraer del radical aquella parte que lo permita.

Ejemplos.

1) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}$

el índice común es 6, por lo tanto:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{\left(2x^2\right)^2}=\sqrt[6]{x^3\cdot 4x^4}=\sqrt[6]{4x^7}=\sqrt[6]{4x^6\cdot x}=x\sqrt[6]{4x}$$

2) $3\sqrt{2ab}\cdot 4\sqrt[4]{8a^3}$

el índice común es 8, por lo tanto:

$$3\sqrt{2ab}\cdot 4\sqrt[4]{8a^3}=3\sqrt[8]{(2ab)^4}\cdot 4\sqrt[8]{\left(8a^3\right)^2}=12\sqrt[8]{2^4a^4b^4\cdot\left(2^3\right)^2a^6}=12\sqrt[8]{2^4a^4b^4\cdot 2^6a^6}$$

$$=12\sqrt[8]{2^{10}a^{10}b^4}=12\sqrt[8]{2^8 2^2a^8a^2b^4}=12\cdot 2a\sqrt[8]{2^2a^2b^4}=24a\sqrt[4]{2ab^2}$$

3) $\sqrt[3]{a^2b^2}\cdot 2\sqrt[4]{3a^3b}$

el índice común es 12, por lo tanto:

$$\sqrt[3]{a^2b^2}\cdot 2\sqrt[4]{3a^3b}=\sqrt[12]{\left(a^2b^2\right)^4}\cdot 2\sqrt[12]{\left(3a^3b\right)^3}=2\sqrt[12]{a^8b^8\cdot 3^3a^9b^3}=2\sqrt[12]{3^3a^{17}b^{11}}=2\sqrt[12]{3^3a^{12}a^5b^{11}}$$

$$=2a\sqrt[12]{27a^5b^{11}}$$

4) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4m^2}\cdot\frac{3}{4}\sqrt[5]{16m^4n}$

el índice común es 15, por lo tanto:

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{4m^2}\cdot\frac{3}{4}\sqrt[5]{16m^4n}=\frac{6}{12}\sqrt[15]{\left(4m^2\right)^5}\cdot\sqrt[15]{\left(16m^4n\right)^3}=\frac{1}{2}\sqrt[15]{4^5m^{10}\cdot 16^3m^{12}n^3}=\frac{1}{2}\sqrt[15]{\left(2^2\right)^5m^{10}\cdot\left(2^4\right)^3m^{12}n^3}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[15]{2^{10}m^{10}\cdot 2^{12}m^{12}n^3}=\frac{1}{2}\sqrt[15]{2^{22}m^{22}n^3}=\frac{1}{2}\sqrt[15]{2^{15}2^7m^{15}m^7n^3}=\frac{1}{2}\cdot 2m\sqrt[15]{2^7m^7n^3}=m\sqrt[15]{128m^7n^3}$$

Para dividir dos radicales de diferente índice:

- Se halla el MCM de los índices.
- El MCM se divide entre cada índice de la raíz y cada radicando se eleva a este resultado.
- Se resuelven los radicandos como potencia de otra potencia, es decir multiplicando los exponentes.
- Se dividen los radicandos como potencias de la misma base, es decir restando los exponentes.
- El radicando se descompone en factores procurando que sean potencias con exponentes múltiplos del índice de la raíz, a fin de poder extraer del radical aquella parte que lo permita.

Ejemplos.

1) $\frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt[3]{3x}}$

el índice común es 6, por lo tanto:

$$\frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt[3]{3x}}=\frac{\sqrt[6]{\left(3x^2\right)^3}}{\sqrt[6]{(3x)^2}}=\sqrt[6]{\frac{27x^6}{9x^2}}=\sqrt[6]{3x^4}$$

2) $\frac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}}$

el índice común es 12, por lo tanto:

$$\frac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}}=\frac{\sqrt[12]{\left(8a^3b\right)^4}}{\sqrt[12]{\left(4a^2\right)^3}}=\sqrt[12]{\frac{8^4a^{12}b^4}{4^3a^6}}=\sqrt[12]{\frac{4{,}096a^{12}b^4}{64a^6}}=\sqrt[12]{64a^6b^4}=\sqrt[12]{8^2a^6b^4}=\sqrt[6]{8a^3b^2}$$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{5m^4n^3}}{\sqrt[5]{mn^2}}$

el índice común es 15, por lo tanto:

$$\frac{\sqrt[3]{5m^4n^3}}{\sqrt[5]{mn^2}}=\frac{\sqrt[15]{\left(5m^4n^3\right)^5}}{\sqrt[15]{\left(mn^2\right)^3}}=\sqrt[15]{\frac{3{,}125m^{20}n^{15}}{m^3n^6}}=\sqrt[15]{3{,}125m^{17}n^9}=\sqrt[15]{3{,}125m^{15}m^2n^9}=m\sqrt[15]{3{,}125m^2n^9}$$

4) $\dfrac{\sqrt[6]{18x^3y^4z^5}}{\sqrt[4]{3x^2y^2z^3}}$

el índice común es 12, por lo tanto:

$$\frac{\sqrt[6]{18x^3y^4z^5}}{\sqrt[4]{3x^2y^2z^3}}=\frac{\sqrt[12]{\left(18x^3y^4z^5\right)^2}}{\sqrt[12]{\left(3x^2y^2z^3\right)^3}}=\sqrt[12]{\frac{324x^6y^8z^{10}}{27x^6y^6z^9}}=\sqrt[12]{12y^2z}$$

para extraer la raíz de un radical, se multiplican los índices y se simplifica.

Ejemplos.

1) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{a}$

2) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$

3) $\sqrt{\sqrt[4]{25a^2}}=\sqrt[8]{25a^2}=\sqrt[8]{(5a)^2}=\sqrt[4]{5a}$

4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}=\sqrt[15]{x^{10}}=\sqrt[15]{\left(x^2\right)^5}=\sqrt[3]{x^2}$

VI.3.6 RACIONALIZACIÓN DE RADICALES

Racionalizar consiste en eliminar los radicales del denominador de una fracción. Para lograr esto, se multiplican las dos componentes del cociente por una expresión que contenga el radical por eliminar y que cumpla que al multiplicarse, el denominador resulte una expresión racional.

Ejemplos.
Racionalizar las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) $\dfrac{3}{4\sqrt{5}}$

multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{5}$:

$$\frac{3}{4\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{4(5)}=\frac{3\sqrt{5}}{20}$$

3) $\frac{3}{\sqrt[4]{9a}}$

multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt[4]{(9a)^3}$:

$$\frac{3}{\sqrt[4]{9a}}\cdot\frac{\sqrt[4]{(9a)^3}}{\sqrt[4]{(9a)^3}}=\frac{3\sqrt[4]{(9a)^3}}{9a}=\frac{3\sqrt[4]{729a^3}}{9a}=\frac{\sqrt[4]{729a^3}}{3a}$$

4) $\frac{6}{5\sqrt[3]{3x}}$

multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{(3x)^2}$:

$$\frac{6}{5\sqrt[3]{3x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(3x)^2}}{\sqrt[3]{(3x)^2}}=\frac{6\sqrt[3]{(3x)^2}}{5(3x)}=\frac{6\sqrt[3]{9x^2}}{15x}=\frac{2\sqrt[3]{9x^2}}{5x}$$

Ejemplo.

Efectuar la operación $\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{4}}$ y racionalizar el resultado.

Solución.

$$\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cuando se quiere racionalizar una fracción cuyo denominador sea un binomio que posea radicales de segundo grado, se multiplican las dos componentes del cociente por el binomio conjugado del denominador y se simplifica.

Ejemplos.
Racionalizar las siguientes fracciones:

1) $\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

multiplicando el numerador y el denominador por $1-\sqrt{2}$, que es el binomio conjugado del denominador:

$$\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{3-3\sqrt{2}-\sqrt{2}+2}{1-2}=\frac{5-4\sqrt{2}}{-1}=4\sqrt{2}-5$$

2) $\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$

multiplicando el numerador y el denominador por $4+\sqrt{3}$, que es el binomio conjugado del denominador:

$$\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\cdot\frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}=\frac{20+5\sqrt{3}+8\sqrt{3}+6}{16-3}=\frac{26+13\sqrt{3}}{13}=2+\sqrt{3}$$

3) $\dfrac{19}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$

multiplicando el numerador y el denominador por $5\sqrt{2}+4\sqrt{3}$, que es el binomio conjugado del denominador:

$$\frac{19}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}\cdot\frac{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}=\frac{95\sqrt{2}+76\sqrt{3}}{25\cdot 2-16\cdot 3}=\frac{95\sqrt{2}+76\sqrt{3}}{50-48}=\frac{95\sqrt{2}+76\sqrt{3}}{2}$$

4) $\dfrac{4\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{7}}$

multiplicando el numerador y el denominador por $2\sqrt{3}-3\sqrt{7}$, que es el binomio conjugado del denominador:

$$\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{7}}\cdot\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{7}}=\frac{8\cdot 3-12\sqrt{21}-6\sqrt{21}+9\cdot 7}{4\cdot 3-9\cdot 7}=\frac{24-18\sqrt{21}+63}{12-63}=\frac{87-18\sqrt{21}}{-51}$$

$$=\frac{18\sqrt{21}-87}{51}=\frac{6\sqrt{21}-29}{17}$$

VI.4 INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Existen números llamados complejos que forman un sistema numérico que comparte muchas propiedades con los números reales. En este sistema es posible encontrar soluciones a ecuaciones como $x^2=-r$ con $r\in \mathbf{R}^+$ para los cuales el conjunto de los números reales resulta insuficiente.

Se define como *unidad imaginaria* i al número que elevado al cuadrado es -1.

Formalmente, el conjunto de los *números imaginarios* $\mathbf{I}$, se define como:

$$\mathbf{I}=\left\{\, x=bi \;\middle|\; b\in \mathbf{R},\ i=\sqrt{-1}\,\right\}$$

Ejemplos de números imaginarios:

$x_1=8i$

$x_2=-\dfrac{5}{4}i$

$x_3=3.7698i$

$x_4=\sqrt{7}i$

Dado que $\sqrt{-x}=\sqrt{-1}\sqrt{x}$, entonces la solución de una raíz cuadrada de un número real negativo $\sqrt{-x}$ siempre está dado por la raíz no negativa $i\sqrt{x}$.

Ejemplos.

1) $\sqrt{-16}=4i$

2) $\sqrt{-49}=7i$

3) $\sqrt{-8}=2\sqrt{2}i$

Las potencias de la i cumplen lo siguiente:

$i=\sqrt{-1}$

$i^2=-1$

$i^3=i^2i=(-1)i=-i$

$i^4=i^3i=(-i)i=-i^2=1$

$i^5=i^4i=(1)i=i$

$i^6=i^5i=(i)i=i^2=-1$

De acuerdo con lo anterior, en los números imaginarios no se cumple que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\neq\sqrt[n]{a^n}$ si $a<0$.

Ejemplos.
Efectuar los siguientes productos de números imaginarios:

1) $3i\cdot 5i=15i^2=15(-1)=-15$
2) $2i\cdot 4i\cdot 7i=56i^3=56(-i)=-56i$
3) $\frac{3}{4}i\cdot 2i\cdot\frac{6}{5}i\cdot\frac{15}{3}i=9i^4=9(1)=9$
4) $\sqrt{6}i\cdot\sqrt{2}i\cdot\sqrt{5}i\cdot\sqrt{7}i\cdot\sqrt{10}i=\sqrt{4,200}i^5=10\sqrt{42}(i)=10\sqrt{42}i$
5) $(3i)^4\cdot(5i)^2=81i^4\cdot 25i^2=2,025i^6=2,025(-1)=-2,025$

Se denomina *número complejo* a toda expresión de la forma $z=a+bi$ donde a,b son números reales e i es la unidad imaginaria. El primer término del binomio es la *parte real* del número complejo y la segunda es su *parte imaginaria* (que es un número real multiplicado por la unidad imaginaria).

En términos generales, el conjunto de los números complejos, denotado por **C**, en *forma binómica* puede expresarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{C}=\left\{ z=a+bi, \quad \middle| \quad a,b\in\mathbf{R}, \quad i=\sqrt{-1} \right\}$$

Ejemplos de números complejos:

$z_1=2+5i$

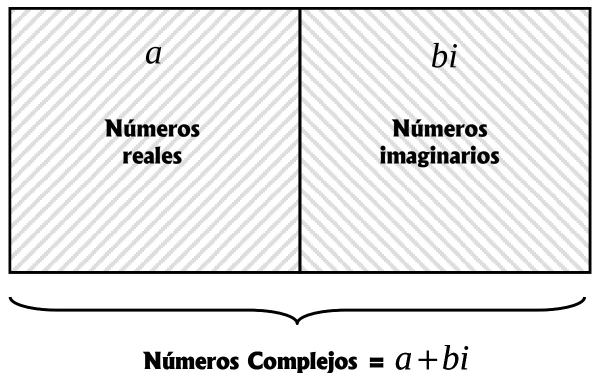
$z_2=-4-3i$

$z_3=\frac{1}{3}+\frac{7}{4}i$

$z_4=8.29-9.37i$

$z_5=-\pi+\sqrt{-11}$

Si $a=0$, el número complejo es un imaginario puro. Si $b=0$ el número complejo es un número real. De esto, se deduce que los números reales y los números imaginarios son subconjuntos de los números complejos:



Un número complejo es igual a cero sólo si sus dos partes son iguales a cero. Dos números complejos son iguales si son iguales sus respectivas partes reales e imaginarias.

Suma de números complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos, entonces $z_1 + z_2$ se define como:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplos.
Sumar los siguientes números complejos:

1) $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 2 + 5i$
Solución:
$z_1 + z_2 = (3 + 2) + (4 + 5)i = 5 + 9i$
2) $z_1 = \frac{9}{2} + 6i$ y $z_2 = \frac{3}{2} - 8i$
Solución:
$z_1 + z_2 = \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\right) + (6 + (-8))i = 6 - 2i$
3) $z_1 = 4.9 - 1.6i$ y $z_2 = -5.3 - 2.2i$
Solución:
$z_1 + z_2 = (4.9 + (-5.3)) + (-1.6 + (-2.2))i = -0.4 - 3.8i$

Resta de números complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos, entonces $z_1 - z_2$ se define como:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplos.
Restar los siguientes números complejos:

1) $z_1 = 3 + 11i$ y $z_2 = 2 + 7i$
Solución:

$z_1 - z_2 = (3-2)+(11-7)i = 1+4i$

2) $z_1 = -\frac{5}{4}+\frac{2}{3}i$ y $z_2 = \frac{1}{3}-\frac{7}{5}i$

Solución:

$z_1 - z_2 = \left(-\frac{5}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\left(-\frac{7}{5}\right)\right)i$

$= \frac{-15-4}{12}+\frac{10+21}{15}i = -\frac{19}{12}+\frac{31}{15}i$

3) $z_1 = 5.2-3.7i$ y $z_2 = -1.8-3.3i$

Solución:

$z_1 - z_2 = (5.2-(-1.8))+(-3.7-(-3.3))i = 7-0.4i$

Producto de números complejos

Sean $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$ dos números complejos, entonces $z_1 \cdot z_2$ viene dado por: $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2$, pero considerando que $i^2 = -1$ y agrupando las respectivas partes reales y las imaginarias, se tiene que:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Ejemplos.
Multiplicar los siguientes números complejos:

1) $z_1 = 4+5i$ y $z_2 = 2+3i$

Solución:

$z_1 \cdot z_2 = (4(2)-5(3))+(4(3)+5(2))i = (8-15)+(12+10)i = -7+22i$

2) $z_1 = 1-9i$ y $z_2 = 8-\frac{3}{4}i$

Solución:

$z_1 \cdot z_2 = \left(1(8)-(-9)\left(-\frac{3}{4}\right)\right)+\left(1\left(-\frac{3}{4}\right)+(-9)(8)\right)i = \left(8-\frac{27}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}-72\right)i$

$= \left(\frac{32-27}{4}\right)+\left(\frac{-3-288}{4}\right)i = \frac{5}{4}-\frac{291}{4}i$

3) $z_1 = 2.5-5i$ y $z_2 = -10-4.5i$

Solución:

$z_1 \cdot z_2 = (2.5(-10)-(-5)(-4.5))+(2.5(-4.5)+(-5)(-10))i$

$= (-25-22.5)+(-11.25+50)i = -47.5+38.75i$

Complejos conjugados

Dos números complejos se llaman *conjugados* si tienen iguales sus componentes reales y opuestas sus componentes imaginarias.

Esto es, dado un número complejo $z = a+bi$, su *conjugado* denotado como $\overline{z}$ es:

$$\overline{z} = a-bi \ .$$

Ejemplos.

1) $z_1 = 6 - 4i$
$\overline{z}_1 = 6 + 4i$
2) $z_2 = 1.5 + 8.3i$
$\overline{z}_2 = 1.5 - 8.3i$
3) $z_3 = -\frac{7}{3} + \frac{1}{2}i$
$\overline{z}_3 = -\frac{7}{3} - \frac{1}{2}i$

Cociente de números complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos. Para obtener $\frac{z_1}{z_2}$ basta con multiplicar el numerador y el denominador por el complejo conjugado del z_2 a fin de que el denominador resultante sea real: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2}$
ordenando se tiene:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2 + d^2}$$

Ejemplos.
Dados los siguientes números complejos, obtener el cociente $\frac{z_1}{z_2}$:

1) $z_1 = 14 + 3i$ y $z_2 = 5 + 4i$
Solución:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{[14(5) + (3)(4)] + [(3)(5) - (14)(4)]i}{5^2 + 4^2} = \frac{(70+12) + (15-56)i}{25+16} = \frac{82 - 41i}{41} = 2 - i$$
2) $z_1 = -18 + 26i$ y $z_2 = 6 - 2i$
Solución:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{[(-18)(6) + (26)(-2)] + [26(6) - (-18)(-2)]i}{6^2 + (-2)^2} = \frac{(-108-52) + (156-36)i}{36+4} = \frac{-160 + 120i}{40} = -4 + 3i$$
3) $z_1 = 6 - 9i$ y $z_2 = -2 - i$
Solución:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{[(6)(-2) + (-9)(-1)] + [(-9)(-2) - (6)(-1)]i}{(-2)^2 + (-1)^2} = \frac{(-12+9) + (18+6)i}{4+1} = \frac{-3 + 24i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{24}{5}i$$