ECUACIONES Y DESIGUALDADES

UNIDAD VII

VII.1 CONCEPTO DE ECUACIÓN

Una *igualdad* es una relación de equivalencia entre dos expresiones, numéricas o literales, que se cumple para algún, algunos o todos los valores y se representa por el signo $=$. Cada una de las expresiones recibe el nombre de *miembro*. Se llama primer miembro a lo que está a la izquierda del signo igual y segundo miembro a lo que está a su derecha.

$$expresión \ \ a = expresión \ \ b$$

Las igualdades pueden ser *numéricas* (establecen relaciones entre números) o *algebraicas* (si contienen literales). Pueden ser *ciertas* (si se cumplen) o *falsas* (si no siempre se cumplen).

Ejemplos

1) La igualdad $10 = 8 + 2$ es numérica y cierta
2) La igualdad $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ es algebraica y cierta para cualesquiera valores de a y b.
3) La igualdad $3x - 14 = x$ es algebraica y cierta para $x = 7$, pero es falsa para cualquier otro valor de x.

Por lo tanto, las igualdades pueden ser de dos tipos:

- *Identidades*. Son igualdades que se verifican siempre, ya sean numéricas o algebraicas.
- *Ecuaciones*. Son igualdades que se verifican para algunos valores determinados de las literales desconocidas llamadas *incógnitas*.

Ejemplos.

1) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ es una identidad numérica
2) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ es una identidad algebraica
3) $4x - 2 = 10$ es una ecuación que se verifica sólo para $x = 3$
4) $x^2 = 4$ es una ecuación que se verifica sólo para $x = 2$ y $x = -2$.

En una ecuación, las cantidades desconocidas o incógnitas generalmente se designan por letras minúsculas de la parte final del alfabeto. Por su parte, las cantidades conocidas o coeficientes normalmente se denotan por las letras minúsculas iniciales del alfabeto[1].

Las ecuaciones de una sola variable son aquellas que tienen una sola incógnita, normalmente la x. Por ejemplo: $x^2 + 1 = x + 4$.

Las ecuaciones en dos o más variables poseen más de una cantidad desconocida. Por ejemplo, en la ecuación $2x + 5y - 8 = 0$, las incógnitas son x y y.

Las ecuaciones se clasifican de acuerdo con el exponente mayor que posea la incógnita.

[1] Esta nomenclatura la introdujo el matemático René Descartes en 1637.

Ejemplos.

$6x-35=7$ es una ecuación de primer grado.
$3x^2+6x-18=-5x+7$ es una ecuación de segundo grado.
$7x^3-2x^2+5y-2x^3=8x-6x^2$ es una ecuación de tercer grado.

Una ecuación es *entera*, si todos sus términos son enteros o es *racional* si alguno de sus términos está expresado como fracción.

Ejemplos.

1) $4x-2y=5-6x$ es una ecuación en dos variables, de primer grado y entera
2) $\frac{3}{4}x^2-5x=\frac{1}{2}$ es una ecuación en una variable, de segundo grado y racional
3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=64$ es una ecuación en dos variables, de segundo grado y racional
4) $7x-2y-8z=11$ es una ecuación en tres variables, de primer grado y entera

Resolver una ecuación es hallar el conjunto solución. Se conocen como raíces o soluciones de la ecuación a los valores de las incógnitas que satisfacen la igualdad[2].

Ejemplos.
1) En la ecuación $4x+7=x+1$
El resultado es $x=-2$, porque si se sustituye el valor en ambos miembros, cumple la igualdad:
$4(-2)+7=-2+1$
$-8+7=-1$
$-1\equiv-1$

2) En la ecuación $x^2+x-12=0$
Los resultados son $x_1=-4$ y $x_2=3$, porque si se sustituyen los valores, cumplen la igualdad:
Sustituyendo $x_1=-4$:
$(-4)^2+(-4)-12=0$
$16-4-12=0$
$0\equiv0$
Sustituyendo $x_2=3$:
$3^2+3-12=0$
$9+3-12=0$
$0\equiv0$

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo.
Las ecuaciones $2x-3=5$ y $2x=8$ son equivalentes porque su solución es $x=4$

[2] En situaciones reales la solución de la ecuación debe tener sentido en el contexto en que se trabaja. Esto significa que no basta con resolver una ecuación sino que también hay que analizar la pertinencia de la solución, esto es si el resultado pertenece al conjunto definido por la situación particular a la que se refiere la ecuación. En este tema se abordarán soluciones de ecuaciones que sólo existan en los números reales.

Para resolver una ecuación, se transforma ésta en una ecuación equivalente con la variable despejada. Esta transformación se logra aplicando las siguientes propiedades:

- Si se suma una misma cantidad a cada lado de la ecuación dada, la igualdad no se altera.
- Si se resta una misma cantidad a cada miembro de la ecuación dada, la igualdad no se altera.
- Si se multiplica o se divide a ambos lados de la ecuación por cualquier cantidad diferente de cero, la igualdad no se altera.

Ejemplos.
1) Sumando la misma cantidad, 7 a cada lado de la ecuación $3x-7+6=8$ se tiene:
$3x-7+6+7=8+7$, que reducida es: $3x+6=15$. Nótese como 7 es el simétrico de -7

2) Restando la misma cantidad, 6 a cada lado de la ecuación $3x+6=15$ se tiene:
$3x+6-6=15-6$, que reducida es: $3x=9$. Nótese como -6 es el simétrico de 6

3) Multiplicando la misma cantidad, $\frac{1}{3}$ a cada lado de la ecuación $3x=9$ se tiene:
$\frac{1}{3}(3x)=\frac{1}{3}(9)$, que reducida es: $x=3$. Nótese como $\frac{1}{3}$ es el inverso multiplicativo o recíproco de 3

VII.2 ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN UNA VARIABLE

Una ecuación de primer grado es una ecuación en la cual, después de simplificarla o reducir sus términos semejantes, el máximo exponente de la incógnita es uno.

En términos generales, una ecuación de primer grado con una variable es de la forma:

$$ax+b=0$$

donde a y b son coeficientes numéricos, $a\neq 0$ y x es la incógnita.

Si se suma $-b$ en ambos miembros de la ecuación, se tiene: $ax+b-b=0-b \quad\Rightarrow\quad ax=-b$, y si se multiplica por el recíproco de a en ambos lados se tiene: $\frac{1}{a}(ax)=\frac{1}{a}(-b)$, entonces la solución de una ecuación de primer grado en su forma general está dada por $x=-\frac{b}{a}$.

VII.2.1 ECUACIONES ENTERAS

Para resolver una ecuación de este tipo se debe aplicar la metodología antes citada. En este caso, se deben transponer los términos, esto es traspasarlos de un lado a otro de la ecuación de manera que todos los términos que tengan la incógnita queden en el primer miembro y los términos independientes en el otro. Para fines prácticos, cada vez que se transpone un término de un miembro a otro, éste cambia de signo, se reducen términos semejantes y finalmente, para despejar la incógnita se divide por su coeficiente.

Ejemplos.
Resolver las siguientes ecuaciones enteras:

1) $6x-7+4-2x=13x-2+3x+19+8x$
Se transponen términos:

$6x-2x-13x-3x-8x=-2+19+7-4$
se reducen los términos semejantes:
$-20x=20$
dividiendo por -20:
$x=\frac{20}{-20}=-1$
Comprobación:
$6(-1)-7+4-2(-1)=-6-7+4+2=-7$
$13(-1)-2+3(-1)+19+8(-1)=-13-2-3+19-8=-7$
$-7\equiv -7$

2) $4x-7-2x+8=6x-9+3x-12-11x$
Transponiendo términos:
$4x-2x-6x-3x+11x=-9-12+7-8$
se reducen los términos semejantes:
$4x=-22$
dividiendo por 4:
$x=\frac{-22}{4}=-\frac{11}{2}$
Comprobación:
$4\left(-\frac{11}{2}\right)-7-2\left(-\frac{11}{2}\right)+8=6\left(-\frac{11}{2}\right)-9+3\left(-\frac{11}{2}\right)-12-11\left(-\frac{11}{2}\right)=-22-7+11+8=-10$
$-33-9-\frac{33}{2}-12+\frac{121}{2}=-10$
$-10\equiv -10$

3) $2(x+3)-5(x-1)=3x-4(x-1)$
Se eliminan los paréntesis:
$2x+6-5x+5=3x-4x+4$
después, se transponen términos:
$2x-5x-3x+4x=4-6-5$
Se reducen los términos semejantes:
$-2x=-7$
dividiendo por -2:
$x=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}$
Comprobación:
$2\left(\frac{7}{2}+3\right)-5\left(\frac{7}{2}-1\right)=2\left(\frac{13}{2}\right)-5\left(\frac{5}{2}\right)=13-\frac{25}{2}=\frac{1}{2}$
$3\left(\frac{7}{2}\right)-4\left(\frac{7}{2}-1\right)=\frac{21}{2}-4\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{21}{2}-10=\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\equiv\frac{1}{2}$

4) $-3(6x-5)-9(8-10x)+16-26(1-x)=0$
Se eliminan los paréntesis:

$-18x+15-72+90x+16-26+26x=0$
después, se transponen términos:
$-18x+90x+26x=-15+72-16+26$
Se reducen los términos semejantes:
$98x=67$
dividiendo por 98:
$$x=\frac{67}{98}$$
Comprobación:
$$-3\left[6\left(\frac{67}{98}\right)-5\right]-9\left[8-10\left(\frac{67}{98}\right)\right]+16-26\left(1-\frac{67}{98}\right)=\frac{132}{49}-\frac{513}{49}+16-\frac{403}{49}=0$$

Una ecuación de primer grado literal es aquella que contiene otras expresiones literales aparte de la incógnita, las cuales deben considerarse como valores constantes.

Para resolver ecuaciones literales se efectúa el mismo procedimiento aplicado en los ejemplos anteriores. La variante es que cuando se tengan todos los términos que contengan a la incógnita en el primer miembro de la ecuación, se factoriza para poder despejarla.

5) $ax-b(x-1)=3(x+a)$
Se eliminan los paréntesis:
$ax-bx+b=3x+3a$
transponiendo términos:
$ax-bx-3x=3a-b$
Se factoriza:
$(a-b-3)x=3a-b$
dividiendo por $(a-b-3)$:
$$x=\frac{3a-b}{a-b-3}$$
Comprobación:
$$a\left(\frac{3a-b}{a-b-3}\right)-b\left(\frac{3a-b}{a-b-3}-1\right)=\frac{a(3a-b)-b(3a-b)+b(a-b-3)}{a-b-3}=\frac{3a^2-ab-3ab+b^2+ab-b^2-3b}{a-b-3}$$
$$=\frac{3a^2-3ab-3b}{a-b-3}$$
$$3\left(\frac{3a-b}{a-b-3}+a\right)=\frac{9a-3b+3a(a-b-3)}{a-b+3}=\frac{9a-3b+3a^2-3ab-9a}{a-b+3}=\frac{3a^2-3ab-3b}{a-b+3}$$
$$\frac{3a^2-3ab-3b}{a-b+3}\equiv\frac{3a^2-3ab-3b}{a-b+3}$$

VII.2.2 ECUACIONES FRACCIONARIAS

Para resolver una ecuación fraccionaria de primer grado, se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores con el objeto de eliminarlos y se reduce para convertirla en una ecuación entera.

Ejemplos.
Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:

1) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}x=\frac{5}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{7}{3}$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 12:

$12\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}x\right)=12\left(\frac{5}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{7}{3}\right)$

se efectúan las operaciones para cada término:

$8+3x=20x-9x+28$

se transponen términos:

$3x-20x+9x=28-8$

Se reducen los términos semejantes:

$-8x=20$

dividiendo por -8:

$x=-\frac{20}{8}=-\frac{5}{2}$

Comprobación:

$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{3}-\frac{5}{8}=\frac{16}{24}-\frac{15}{24}=\frac{1}{24}$

$\frac{5}{3}\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{4}\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{7}{3}=-\frac{25}{6}+\frac{15}{8}+\frac{7}{3}=-\frac{100}{24}+\frac{45}{24}+\frac{56}{24}=\frac{1}{24}$

$\frac{1}{24}\equiv\frac{1}{24}$

2) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}x-7=\frac{6}{5}x-8-\frac{11}{3}x-2x$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 15:

$15\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}x-7\right)=15\left(\frac{6}{5}x-8-\frac{11}{3}x-2x\right)$

se efectúan las operaciones para cada término:

$12+10x-105=18x-120-55x-30x$

se transponen términos:

$10x-18x+55x+30x=-120-12+105$

Se reducen los términos semejantes:

$77x=-27$

dividiendo por 77:

$x=-\frac{27}{77}$

Comprobación:

$\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\left(-\frac{27}{77}\right)-7=\frac{4}{5}-\frac{18}{77}-7=\frac{308}{385}-\frac{90}{385}-\frac{2695}{385}=-\frac{2477}{385}$

$\frac{6}{5}\left(-\frac{27}{77}\right)-8-\frac{11}{3}\left(-\frac{27}{77}\right)-2\left(-\frac{27}{77}\right)=-\frac{162}{385}-8+\frac{9}{7}+\frac{54}{77}=-\frac{162}{385}-\frac{3080}{385}+\frac{495}{385}+\frac{270}{385}=-\frac{2477}{385}$

$-\frac{2477}{385}\equiv-\frac{2477}{385}$

3) $\frac{2x-4}{6}-\frac{3x-5}{10}=0$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 30:

$$30\left(\frac{2x-4}{6}-\frac{3x-5}{10}\right)=30(0)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$5(2x-4)-3(3x-5)=0$$

se eliminan los paréntesis:

$$10x-20-9x+15=0$$

se transponen términos:

$$10x-9x=20-15$$

Se reducen los términos semejantes:

$$x=5$$

Comprobación:

$$\frac{2(5)-4}{6}-\frac{3(5)-5}{10}=\frac{10-4}{6}-\frac{15-5}{10}=\frac{6}{6}-\frac{10}{10}=1-1=0$$

VII.2.3 ECUACIONES QUE CONTIENEN FRACCIONES ALGEBRAICAS

Para resolver este tipo de ecuaciones se multiplica por el MCM de los denominadores que pueden ser un polinomio. En algunos casos, la ecuación resultante puede no ser equivalente a la original y la expresión dada no tiene solución, en este caso la igualdad es un enunciado falso.

Ejemplos.

Resolver las siguientes ecuaciones que contienen fraccionarias algebraicas:

1) $\frac{4}{5x}-9+\frac{5}{3x}=\frac{8}{5x}-\frac{6}{15}-8-\frac{2}{3}$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $15x$:

$$15x\left(\frac{4}{5x}-9+\frac{5}{3x}\right)=15x\left(\frac{8}{5x}-\frac{6}{15}-8-\frac{2}{3}\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$12-135x+25=24-6x-120x-10x$$

se transponen términos:

$$-135x+6x+120x+10x=24-12-25$$

Se reducen los términos semejantes:

$$x=-13$$

Comprobación:

$$\frac{4}{5(-13)}-9+\frac{5}{3(-13)}=-\frac{4}{65}-9-\frac{5}{39}=-\frac{12}{195}-\frac{1755}{195}-\frac{25}{195}=-\frac{1792}{195}$$

$$\frac{8}{5(-13)}-\frac{6}{15}-8-\frac{2}{3}=-\frac{8}{65}+\frac{6}{195}-8-\frac{2}{3}=-\frac{24}{195}-\frac{78}{195}-\frac{1560}{195}-\frac{130}{195}=-\frac{1792}{195}$$

$$-\frac{1792}{195}\equiv-\frac{1792}{195}$$

2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5x}-\frac{1}{3x}=\frac{7}{5x}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $30x$:

$30x\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5x}-\frac{1}{3x}\right)=30x\left(\frac{7}{5x}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)$

se efectúan las operaciones para cada término:

$15x+12-10=42+5x-10x$

se transponen términos:

$15x-5x+10x=42-12+10$

Se reducen los términos semejantes:

$20x=40$

dividiendo por 20 :

$x=\frac{40}{20}=2$

Comprobación:

$\frac{1}{2}+\frac{2}{5(2)}-\frac{1}{3(2)}=\frac{1}{2}+\frac{2}{10}-\frac{1}{6}=\frac{15}{30}+\frac{6}{30}-\frac{5}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$

$\frac{7}{5(2)}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{7}{10}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{21}{30}+\frac{5}{30}-\frac{10}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$

$\frac{8}{15}\equiv\frac{8}{15}$

3) $\frac{6}{5-3x}+4=10$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $5-3x$:

$(5-3x)\frac{6}{5-3x}+(5-3x)4=(5-3x)10$

se efectúan las operaciones para cada término:

$6+20-12x=50-30x$

se transponen términos:

$-12x+30x=50-6-20$

Se reducen los términos semejantes:

$18x=24$

dividiendo por 18:

$x=\frac{24}{18}=\frac{4}{3}$

Comprobación:

$\frac{6}{5-3\left(\frac{4}{3}\right)}+4=\frac{6}{5-4}+4=6+4=10$

$10\equiv10$

4) $\frac{2}{5x}-\frac{6}{4x}-8=-\frac{32}{4}-\frac{3}{2x}-\frac{4}{10x}$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $20x$:

$$20x\left(\frac{2}{5x}-\frac{6}{4x}-8\right)=20x\left(-\frac{32}{4}-\frac{3}{2x}-\frac{4}{10x}\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$8-30-160x=-160x-30-8$

se transponen términos:

$-160x+160x=-30-8-8+30$

Se reducen los términos semejantes:

$-0x=-16$

Como la división por cero no está definida, entonces el ejemplo planteado no es ecuación sino un enunciado falso.

5) $\frac{4}{x-3}-2=\frac{8}{2x-6}+5$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $2x-6$:

$$(2x-6)\left(\frac{4}{x-3}-2\right)=(2x-6)\left(\frac{8}{2x-6}+5\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$2(4)-(2x-6)2=8+(2x-6)5$

$8-4x+12=8+10x-30$

se transponen términos:

$-4x-10x=8-30-8-12$

Se reducen los términos semejantes:

$-14x=-42$

dividiendo por -14:

$x=\frac{-42}{-14}$

$x=3$

Comprobación:

$\frac{4}{3-3}-2=\frac{4}{0}-2$

$\frac{8}{2(3)-6}+5=\frac{8}{6-6}-5=\frac{8}{0}+5$

Como la división por cero no está definida, entonces el ejemplo planteado no es ecuación sino un enunciado falso. Para ambas fracciones, el valor $x=3$ no es aceptable. Por lo tanto, la solución es el conjunto vacío.

VII.2.4 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Una de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones es la de resolver problemas de la vida cotidiana.

Para plantear ecuaciones es conveniente saber traducir un enunciado a una expresión algebraica. Una útil lista de interpretaciones de enunciado a expresión algebraica es la siguiente:

Enunciado	Expresión Algebraica
El doble de x	$2x$
El triple de x	$3x$
El cuádruplo de x	$4x$
El cuadrado de x	x^2
El cubo de x	x^3
El antecesor del número entero x	$x-1$
El sucesor del número entero x	$x+1$
El cuadrado del doble de x	$(2x)^2$
El doble del cuadrado de x	$2x^2$
Un número par	$2x$
Un número impar	$2x+1$
Dos números consecutivos	x y $x+1$
Dos números pares consecutivos	$2x$ y $2x+2$
Dos números impares consecutivos	$2x-1$ y $2x+1$
La mitad de x	$\frac{1}{2}x$
La tercera parte de x	$\frac{1}{3}x$

Ejemplos.

1) ¿Qué número es aquel que si se duplica, y luego se le resta 12, da por resultado el número aumentado en 3?
Solución.
Si x es el número buscado.

$$2x-12=x+3$$
$$2x-x=3+12$$
$$x=15$$

Por lo tanto, el número es el 15.

2) Erick tiene un año más que el doble de la edad de Jorge y sus edades suman 97. ¿Qué edad tienen ambos?
Solución.
Si x es la edad de Jorge, entonces la edad de Erick es $2x+1$
Planteando que la suma de las edades es 97, se obtiene la ecuación:

$$x+2x+1=97$$
$$x+2x=97-1$$
$$3x=96$$
$$x=\frac{96}{3}=32$$

reemplazando este valor de x en la expresión $2x+1$ se tiene: $2(32)+1=62+1=65$
Por lo tanto, la edad de Jorge es 32 años y la de Erick es 65 años.

3) Blanca tiene 300 pesos más que Ana. Si entre ambas tienen $1{,}200$, ¿cuál es el capital de Blanca?
Solución.
Si Ana tiene x, entonces Blanca tiene $x+300$

$x+x+300=1200$

$x+x=1200-300$

$2x=900$

$x=\frac{900}{2}=450$

Por lo tanto, el capital de Blanca es $x+300=750$ pesos.

4) El perímetro de un jardín rectangular es de 58 m. Si el lado mayor mide 11 m. más que el lado menor. ¿Cuánto miden los lados del jardín?
Solución.
Sea x el lado menor del rectángulo, entonces el lado mayor es $x+11$
Al sumar todos los lados del rectángulo e igualar al perímetro dado se obtiene:

$x+x+x+11+x+11=58$

$x+x+x+x=58-11-11$

$4x=36$

$x=\frac{36}{4}=9$

El lado mayor mide: $x+11=9+11=20$ m
Por lo tanto, los lados del jardín miden 9 m. y 20 m.

5) El hermano mayor de una familia con tres hermanos tiene 4 años más que el segundo y éste 3 más que el menor. Si entre los tres suman la edad del padre que tiene 40 años ¿qué edad tiene cada hermano?
Solución.
Sea x la edad del hermano menor
$x+3$ es la edad del hermano mediano
$x+7$ es la edad del hermano mayor

$x+x+3+x+7=40$

$x+x+x=40-3-7$

$3x=30$

$x=\frac{30}{3}=10$, entonces el hermano mediano tiene $x+3=13$ años y el mayor $x+7=17$ años.

Por lo tanto, las edades de los tres hermanos son: 10, 13 y 17 años.

6) Un examen consta de 20 reactivos. Cada respuesta correcta se valora con 3 puntos y cada respuesta incorrecta se resta 2 puntos. Si al final del examen, un alumno consiguió 30 puntos. ¿Cuántos reactivos contestó correctamente y cuántos incorrectamente?
Solución.
Sea x el número de reactivos correctos
$20-x$ es el número de reactivos incorrectos
$3x$ es el número de puntos conseguidos por los reactivos correctos
$2(20-x)$ es el número de puntos perdidos por los reactivos incorrectos

$3x-2(20-x)=30$

$3x-40+2x=30$

$3x+2x=30+40$

$$5x = 70$$
$$x = \frac{70}{5} = 14$$
$$20 - x = 20 - 14 = 6$$

Por lo tanto, el alumno tuvo 14 respuestas correctas y 6 incorrectas.

7) Hallar un número tal que su mitad más su cuarta parte más 1, sea igual al número pedido.
Solución.
Sea x el número buscado

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = x$$
$$4\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1\right) = 4(x)$$
$$2x + x + 4 = 4x$$
$$2x + x - 4x = -4$$
$$-x = -4$$
$$x = \frac{-4}{-1} = 4$$

El número buscado es 4.

8) Una llave llena un depósito en 3 horas y otra lo hace en 6 horas. Si el depósito está vacío y se abren las dos llaves a la vez, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse?
Solución.
La primera llave llena $\frac{1}{3}$ del depósito en una hora
La segunda llave llena $\frac{1}{6}$ del depósito en una hora
Si x el tiempo en horas que las llaves llenan juntas el depósito, entonces $\frac{1}{x}$ es la fracción de depósito que llenan juntas en una hora, Así que:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$
$$6x\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 6x\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$2x + x = 6$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} = 2$$

Por lo tanto, el depósito se llenaría en dos horas.

VII.2.5 GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Resolver una ecuación es encontrar un valor de x que, al ser sustituido en la ecuación y realizar las operaciones indicadas, se llegue a que la igualdad es cierta. Para ello se debe dejar sola a la variable x de un lado de la ecuación. A esto se le llama *despejar* a la variable.

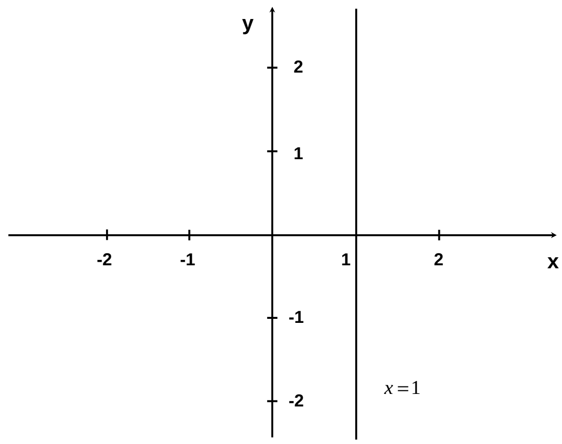
Gráficamente, la solución de la ecuación está representada por una línea recta vertical en el plano cartesiano. La solución es el valor de la abscisa del punto en el que esa recta corta al eje x.

Ejemplos.
Representar gráficamente la solución de las siguientes ecuaciones de primer grado:

1) $3(x-1)=4-2(x+1)$

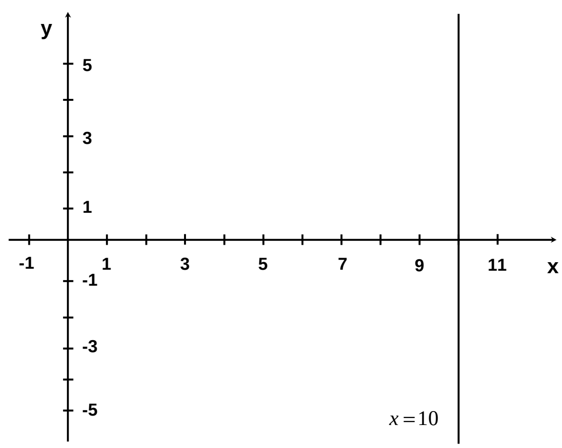
Solución.

$$3x-3=4-2x-2$$
$$3x+2x=4-2+3$$
$$5x=5$$
$$x=\frac{5}{5}=1$$



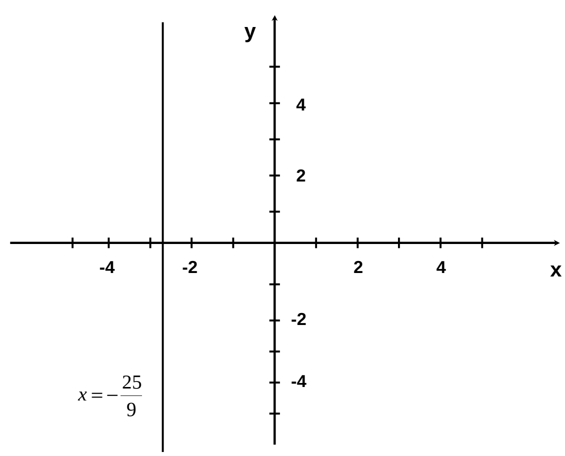
2) $\frac{x}{6}+\frac{x}{3}=5$

$$6\left(\frac{x}{6}+\frac{x}{3}\right)=6(5)$$
$$x+2x=30$$
$$3x=30$$
$$x=\frac{30}{3}=10$$



3) $\frac{1}{3x}-8-\frac{7}{2x}=\frac{1}{6x}-7+\frac{1}{5}$

$$30x\left(\frac{1}{3x}-8-\frac{7}{2x}\right)=30x\left(\frac{1}{6x}-7+\frac{1}{5}\right)$$
$$10-240x-105=5-210x+6x$$
$$-240x+210x-6x=5-10+105$$
$$-36x=100$$
$$x=\frac{100}{-36}=-\frac{25}{9}\approx-2.77$$



VII.3 DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO EN UNA VARIABLE

La expresión $a \neq b$ significa que " a " no es igual a " b ".

Según los valores particulares de a y de b, puede tenerse $a > b$, que se lee " a mayor que b ", cuando la diferencia $a - b$ es positiva y $a < b$ que se lee " a menor que b ", cuando la diferencia $a - b$ es negativa.

La notación $a \geq b$, que se lee " a es mayor o igual que b ", significa que $a > b$ o que $a = b$ pero no ambos. Por su parte, la notación $a \leq b$ que se lee " a es menor o igual que b ", significa que $a < b$ o que $a = b$ pero no ambos.

Una *desigualdad* se obtiene al escribir dos expresiones numéricas o algebraicas relacionadas con alguno de los símbolos $>, <, \geq$ o $\leq$.

Ejemplos de desigualdades:
1) $4 > 3$
2) $a < 10$
3) $b \geq 5$
4) $x^2 \leq 1$

Lo mismo que en las igualdades, en toda desigualdad, los términos que están a la izquierda del signo mayor o menor, forman el primer miembro de la desigualdad, y los términos de la derecha, forman el segundo miembro.

De la definición de desigualdad, se deduce que:

- Todo número positivo es mayor que cero
- Todo número negativo es menor que cero
- Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto
- Si $a > b$ entonces $b < a$.

Los signos $>$ o $<$ determinan dos sentidos opuestos en las desigualdades, dependiendo si el primer miembro es mayor o menor que el segundo. Se dice que una desigualdad cambia de sentido, cuando el miembro mayor se convierte en menor o viceversa.

Existen dos clases de desigualdades: las absolutas y las condicionales.

- Desigualdad *absoluta* es aquella que se verifica para cualquier valor que se atribuya a las literales que figuran en ella. Por ejemplo: $x^2 + 1 > x$

- Desigualdad *condicional* es aquella que sólo se verifica para ciertos valores de las literales. Por ejemplo: $3x - 15 > 0$ que solamente satisface para $x > 5$. En este caso se dice que 5 es el límite de x.

Las desigualdades condicionales se llaman *inecuaciones*.

Sean $a, b \in \mathbf{R}$ y $a \neq 0$, una desigualdad de primer grado en una variable x se define como: $\begin{cases} ax + b > 0 \\ ax + b \geq 0 \\ ax + b < 0 \\ ax + b \leq 0 \end{cases}$

Propiedades de las desigualdades:

Sean a, b, c tres números reales.

I. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se añade o se resta un mismo número a cada miembro

Esto es, si $a > b$, entonces se cumple que $a + c > b + c$.

Ejemplos.
1) Si a la desigualdad $7 > 3$ se le suma 2 a ambos miembros, entonces, se cumple que $7 + 2 > 3 + 2$, ya que: $9 > 5$

2) Si a la desigualdad $16 > 8$ se le resta 5 a ambos miembros, entonces, se cumple que $16 - 5 > 8 - 5$, ya que: $11 > 3$
Consecuencia de esta propiedad, puede suprimirse un término en un miembro de una desigualdad, teniendo cuidado de agregar en el otro miembro el término simétrico del suprimido. Es decir, se puede pasar un término de un miembro a otro, cambiando su signo, porque esto equivale a sumar o restar una misma cantidad a los dos miembros.

Ejemplo.
$8x - 4 > 3x - 9$
$8x - 3x > -9 + 4$

II. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor positivo, o se dividen por un mismo divisor, también positivo.

Esto es, dado un número $c > 0$, si $a > b$ entonces se cumple que $a \cdot c > b \cdot c$ y que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Ejemplos.
1) Si a la desigualdad $5 > 2$ se multiplica por 3 a ambos miembros, entonces, se cumple que $5 \cdot 3 > 2 \cdot 3$, ya que $15 > 6$

2) Si a la desigualdad $36 > 28$ se divide por 4 a ambos miembros, entonces, se cumple que $\frac{36}{4} > \frac{28}{4}$, ya que $9 > 7$

III. Una desigualdad cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor negativo, o se dividen por un mismo divisor, también negativo.

Esto es, dado un número $c < 0$, si $a > b$ entonces se cumple que $a \cdot c < b \cdot c$ y que $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Ejemplos.
1) Si a la desigualdad $6 > 3$ se multiplica por -4 a ambos miembros, entonces, se cumple que $6(-4) < 3(-4)$, ya que $-24 < -12$

2) Si a la desigualdad $16 > 10$ se divide por -2 a ambos miembros, entonces, se cumple que $\frac{16}{-2} < \frac{10}{-2}$, ya que $-8 < -5$

Consecuencia de la propiedad anterior pueden cambiarse todos los signos de una desigualdad, con tal que se cambie el sentido de la misma; porque esto equivale a multiplicar sus dos miembros por -1.

Ejemplo.
$-6x+18<2-4x$
$6x-18>-2+4x$

VII.3.1 INECUACIONES ENTERAS

Las inecuaciones son desigualdades entre expresiones algebraicas. A diferencia de las ecuaciones, que sólo se verifican para algunos valores de la variable, las inecuaciones tienen infinitas soluciones. El procedimiento para resolverlas es similar al de las ecuaciones, sólo que deben tenerse en cuenta las propiedades de las desigualdades.

Para resolver una inecuación de primer grado se transponen los términos (pasar los términos de un miembro a otro cambiando el signo equivale a aplicar la propiedad I) para que aquellos que contienen a la incógnita queden en el primer miembro y los términos independientes en el otro. Finalmente, para despejar la incógnita se divide por el valor del coeficiente, teniendo en cuenta la segunda o tercera propiedad de las desigualdades, según el signo del coeficiente.

Ejemplos.
Resolver las siguientes inecuaciones enteras:

1) $4x+6>2x-8$
Solución.
Se transponen términos:
$4x-2x>-8-6$
se reducen los términos semejantes:
$2x>-14$
dividiendo por 2:
$$x>\frac{-14}{2} \quad\Rightarrow\quad x>-7$$

2) $13x-3x+2-5x\geq -10+2x+6$
Solución.
Se transponen términos:
$13x-3x-5x-2x\geq -10+6-2$
se reducen los términos semejantes:
$3x\geq -6$
dividiendo por 3:
$$x\geq\frac{-6}{3} \quad\Rightarrow\quad x\geq -2$$

3) $5x+6-3x>34+8x-10$
Solución.
Se transponen términos:
$5x-3x-8x>34-10-6$
se reducen los términos semejantes:
$-6x>18$
dividiendo por -6 y aplicando la tercera propiedad, la desigualdad cambia de sentido:

$x < \frac{18}{-6} \quad \Rightarrow \quad x < -3$

4) $3x - 2 - 5x - 10x - 6 > 13 - 8x + 4 + 23 + 4x$
Solución.
Se transponen términos:
$3x - 5x - 10x + 8x - 4x > 13 + 4 + 23 + 2 + 6$
se reducen los términos semejantes:
$-8x > 48$
dividiendo por -8 y aplicando la tercera propiedad, la desigualdad cambia de sentido:
$x < \frac{48}{-8} \quad \Rightarrow \quad x < -6$

5) $5(2x - 3) + 1 + 4(3x - 5) \leq 3(x + 10) + 4(2x + 8) + x$
Solución.
Eliminando paréntesis:
$10x - 15 + 1 + 12x - 20 \leq 3x + 30 + 8x + 32 + x$
Se transponen términos:
$10x + 12x - 3x - 8x - x \leq 30 + 32 + 15 - 1 + 20$
se reducen los términos semejantes:
$10x \leq 96$
dividiendo por 10:
$x \leq \frac{96}{10} \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{48}{5}$

Una inecuación de primer grado literal es aquella que contiene otras expresiones literales aparte de la incógnita, las cuales deben considerarse como valores constantes.

Para resolver inecuaciones literales se efectúa el mismo procedimiento aplicado en los ejemplos anteriores. La variante es que cuando se tengan todos los términos que contengan a la incógnita en el primer miembro de la inecuación, se factoriza para poder despejarla.

6) $2ax - 3b(x - 4) - 6abx > 5(x + a) - ab$
Eliminando paréntesis:
$2ax - 3bx + 12b - 6abx > 5x + 5a - ab$
Se transponen términos:
$2ax - 3bx - 6abx - 5x > 5a - ab - 12b$
factorizando x:
$x(2a - 3b - 6ab - 5) > 5a - ab - 12b$
si $(2a - 3b - 6ab - 5) > 0$, entonces la solución es $x > \frac{5a - ab - 12b}{2a - 3b - 6ab - 5}$
si $(2a - 3b - 6ab - 5) < 0$, entonces la solución es $x < \frac{5a - ab - 12b}{2a - 3b - 6ab - 5}$

VII.3.2 INECUACIONES FRACCIONARIAS

Para resolver una inecuación fraccionaria de primer grado, se multiplican sus dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores con el objeto de eliminarlos y se reduce para convertirla en una inecuación entera. Cuando el denominador contiene la incógnita, tiene que analizarse cuando es tanto positiva como negativa. Para ambos casos debe obtenerse la respectiva intersección de las restricciones. La solución de la inecuación, es la unión de los dos intervalos obtenidos.

Ejemplos.
Resolver las siguientes inecuaciones fraccionarias:

1) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}x>\frac{4}{5}x-\frac{7}{3}$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 15:

$$15\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}x\right)>15\left(\frac{4}{5}x-\frac{7}{3}\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$6+5x>12x-35$$

se transponen términos:

$$5x-12x>-35-6$$

Se reducen los términos semejantes:

$$-7x>-41$$

dividiendo por -7 y aplicando la tercera propiedad, la desigualdad cambia de sentido:

$$x<\frac{-41}{-7} \quad \Rightarrow \quad x<\frac{41}{7}$$

2) $\frac{5}{4}+\frac{2}{3}x-8\geq\frac{2}{5}x-\frac{1}{2}-3x$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 60:

$$60\left(\frac{5}{4}+\frac{2}{3}x-8\right)\geq 60\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{2}-3x\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$75+40x-480\geq 24x-30-180x$$

se transponen términos:

$$40x-24x+180x\geq -30-75+480$$

Se reducen los términos semejantes:

$$196x\geq 375$$

dividiendo por 196:

$$x\geq\frac{375}{196}$$

3) $\frac{9}{4}+\frac{5}{3}x-4>\frac{2}{6}x+\frac{10}{4}+\frac{8}{6}x$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 12:

$$12\left(\frac{9}{4}+\frac{5}{3}x-4\right)>12\left(\frac{2}{6}x+\frac{10}{4}+\frac{8}{6}x\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$27+20x-48>4x+30+16x$$

se transponen términos:

$$20x-4x-16x>30-27+48$$

Se reducen los términos semejantes:

$0x > 51$
como la división por cero no está definida, entonces la expresión presenta un enunciado falso. Nótese que simplificando la inecuación se llega a $\frac{5}{3}x - \frac{7}{4} > \frac{5}{3}x + \frac{5}{2}$, expresión que es imposible que se cumpla.

4) $\frac{7}{6x} + \frac{5}{3} > \frac{8}{6} - \frac{1}{4x}$
Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $12x$:
Si $x > 0$ se tiene:
$12x\left(\frac{7}{6x} + \frac{5}{3}\right) > 12x\left(\frac{8}{6} - \frac{1}{4x}\right)$
se efectúan las operaciones para cada término:
$14 + 20x > 16x - 3$
se transponen términos:
$20x - 16x > -3 - 14$
Se reducen los términos semejantes:
$4x > -17$
dividiendo por 4:
$x > -\frac{17}{4}$
dadas las restricciones $x > 0$ y $x > -\frac{17}{4}$, su intersección es $x > 0$
Si $x < 0$ entonces el resultado de la desigualdad cambia de sentido $x < -\frac{17}{4}$
dadas las restricciones $x < 0$ y $x < -\frac{17}{4}$, su intersección es $x < -\frac{17}{4}$
la solución está dada por: $\left(-\infty, -\frac{17}{4}\right) \cup (0, \infty)$

5) $\frac{4}{5x} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2x} \leq 2 - \frac{1}{3x} - \frac{7}{2x}$
Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $30x$:
Si $x > 0$ se tiene:
$30x\left(\frac{4}{5x} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2x}\right) \leq 30x\left(2 - \frac{1}{3x} - \frac{7}{2x}\right)$
se efectúan las operaciones para cada término:
$24 - 20x - 15 \leq 60x - 10 - 105$
se transponen términos:
$-20x - 60x \leq -10 - 105 - 24 + 15$
Se reducen los términos semejantes:
$-80x \leq -124$
dividiendo por -80 y aplicando la tercera propiedad, la desigualdad cambia de sentido:
$x \geq \frac{-124}{-80} \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{31}{20}$

dadas las restricciones $x > 0$ y $x \geq \frac{31}{20}$, su intersección es $x > \frac{31}{20}$

Si $x < 0$ entonces el resultado de la desigualdad cambia de sentido: $x \leq \frac{31}{20}$

dadas las restricciones $x < 0$ y $x < \frac{31}{20}$, su intersección es $x < 0$

Por lo tanto, la solución está dada por: $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{31}{20}, \infty \right)$

6) $\frac{2}{5-x} + 3 > 0$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $5-x$:

$(5-x)\left(\frac{2}{5-x} + 3 \right) > (5-x)0$

Si $5-x > 0$, que implica $x < 5$ se tiene:

$2 + (5-x)3 > 0$

se efectúan las operaciones para cada término:

$2 + 15 - 3x > 0$

se transponen términos:

$-3x > -2 - 15$

Se reducen los términos semejantes:

$-3x > -17$

dividiendo por -3 y aplicando la tercera propiedad, la desigualdad cambia de sentido:

$x < \frac{-17}{-3} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{17}{3}$

dadas las restricciones $x < 5$ y $x < \frac{17}{3}$, su intersección es $x < 5$

Si $5-x < 0$, que implica $x > 5$ entonces el resultado de la desigualdad cambia de sentido $x > \frac{17}{3}$

dadas las restricciones $x > 5$ y $x > \frac{17}{3}$, su intersección es $x > \frac{17}{3}$

Por lo tanto, la solución está dada por: $(-\infty, 5) \cup \left(\frac{17}{3}, \infty \right)$

7) $\frac{5}{2x-6} + 18 < -12$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $2x-6$:

$(2x-6)\left(\frac{5}{2x-6} + 18 \right) < (2x-6)(-12)$

Si $2x-6 > 0$, que implica $x > 3$ se tiene:

$5 + (2x-6)18 < (2x-6)(-12)$

se efectúan las operaciones para cada término:

$5 + 36x - 108 < -24x + 72$

se transponen términos:

$36x+24x<72-5+108$

Se reducen los términos semejantes:

$60x<175$

dividiendo por 60:

$x<\frac{175}{60} \quad \Rightarrow \quad x<\frac{35}{12}$

dadas las restricciones $x>3$ y $x<\frac{35}{12}$, su intersección es $\frac{35}{12}<x<3$

Si $2x-6<0$, que implica $x<3$ entonces el resultado de la desigualdad cambia de sentido $x>\frac{35}{12}$

dadas las restricciones $x<3$ y $x>\frac{35}{12}$, no existe intersección

Por lo tanto, la solución está dada por: $\frac{35}{12}<x<3$.

VII.3.3 GRÁFICA DE UNA INECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de valores de x que cumplan la desigualdad. Gráficamente, la solución de una inecuación de primer grado está representada por un intervalo del eje de las abscisas a partir de un valor límite a. Si la solución es de la forma $x>a$, entonces la región será todos los números que estén a la derecha de a sin incluirlo. Si la solución es de la forma $x\geq a$, la región incluye al valor a. De la misma forma, si la solución es de la forma $x<a$, entonces la región será todos los números que estén a la izquierda de a sin incluirlo. Si la solución es de la forma $x\leq a$, la región incluye al valor a. Dependiendo del tipo de desigualdad el conjunto solución puede ser uno o dos intervalos, la totalidad de los números reales o el conjunto vacío.

Ejemplos.

Representar gráficamente la solución de las siguientes inecuaciones de primer grado:

1) $4(x+1)>2-3(2x+6)$

Solución.

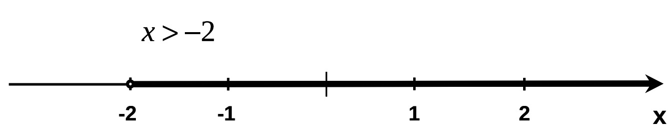
$4x+4>2-6x-18$

$4x+6x>2-18-4$

$10x>-20$

$x>\frac{-20}{10}$

$x>-2$



2) $\frac{3}{4}-7x-\frac{9}{2}\geq\frac{5}{3}-8x+\frac{11}{4}x+5$

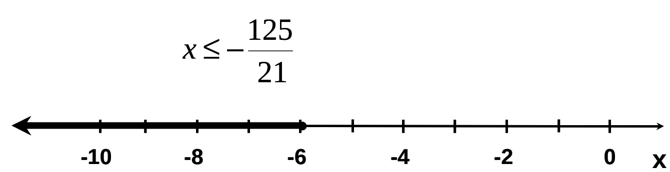
$12\left(\frac{3}{4}-7x-\frac{9}{2}\right)\geq12\left(\frac{5}{3}-8x+\frac{11}{4}x+5\right)$

$9-84x-54\geq20-96x+33x+60$

$-84x+96x-33x\geq20+60-9+54$

$-21x\geq125$

$x\leq-\frac{125}{21}$



3) $-\frac{3}{x}+\frac{7}{2}<\frac{13}{4}-\frac{5}{8x}$

si $x>0$

$8x\left(-\frac{3}{x}+\frac{7}{2}\right)<8x\left(\frac{13}{4}-\frac{5}{8x}\right)$

$-24+28x<26x-5$

$28x-26x<-5+24$

$2x<19$

$x<\frac{19}{2}$

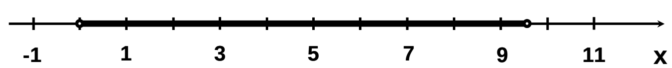
dadas las restricciones $x>0$ y $x<\frac{19}{2}$, su intersección es $0<x<\frac{19}{2}$

Si $x<0$ entonces el resultado de la desigualdad cambia de sentido $x>\frac{19}{2}$

dadas las restricciones $x<0$ y $x>\frac{19}{2}$, no hay intersección.

Por lo tanto, la solución está dada por: $0<x<\frac{19}{2}$

$$0<x<\frac{19}{2}$$



VII.4 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE

Una ecuación de segundo grado en una variable es aquella que, una vez realizadas todas las reducciones posibles, el máximo exponente es dos.

Una ecuación de este tipo también es llamada *ecuación cuadrática* y tiene la forma general:

$$ax^2+bx+c=0$$

donde $a\neq 0$, b y c son números reales; y x es la incógnita. El monomio ax^2 recibe el nombre de *término cuadrático*, bx se conoce como *término lineal* y c es el *término independiente*.

Ejemplos de ecuaciones de segundo grado en una variable:

1) $5x^2+2x-4=0$

2) $\frac{3}{8}x^2-\frac{6}{11}x=\frac{4}{9}$

3) $3.46x^2-8.57x=0$

4) $7x^2-28=0$

Una ecuación de segundo grado tiene siempre dos respuestas (algunas veces repetidas). El objetivo de resolverla es obtener las *raíces* x_1 *y* x_2, si existen, para los que la igualdad de la ecuación es cierta.

Una ecuación cuadrática puede ser de dos tipos:

Ecuación *completa* si $b \neq 0$ y $c \neq 0$
Ecuación *incompleta* si $b = 0$ ó $c = 0$.

En la vida práctica, cuando se tiene que resolver una ecuación cuadrática que surge de un problema concreto, la mayoría de las veces ésta no tiene un formato sencillo, sin embargo, puede reducirse a alguna de estas formas para decidir el método que se usará para resolverla.

Ejemplos.
1) $3x^2 - 8x + 1 = 0$ es una ecuación completa
2) $4x^2 - 12x = 0$ es una ecuación incompleta ya que no tiene el término independiente
3) $7x^2 - 28 = 0$ es una ecuación incompleta porque carece del término lineal.

VII.4.1 ECUACIONES INCOMPLETAS

- Sea una ecuación incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$

trasponiendo el término independiente: $ax^2 = -c$
dividiendo la ecuación por a: $x^2 = -\frac{c}{a}$

Para despejar x de esta ecuación, se busca un número que elevado al cuadrado sea igual a $-\frac{c}{a}$.

Como $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = -\frac{c}{2}$ si $-\frac{c}{a} > 0$ y también $\left(-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = -\frac{c}{2}$ si $-\frac{c}{a} > 0$, entonces estos dos números se encuentran en la recta numérica a un lado y al otro del cero y su distancia al origen es $\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Lo anterior significa que: $|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, lo cual implica que $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ o $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Por lo tanto, las raíces de la ecuación $ax^2 + c = 0$ están dadas por:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Nótese como las raíces de la ecuación existirán siempre y cuando los coeficientes a y c tengan signos opuestos.

Ejemplos.
Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

1) $3x^2 - 12 = 0$

Solución.

$$3x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{12}{3} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

Comprobación:

$$3(2)^2 - 12 = 3(4) - 12 = 12 - 12 = 0$$
$$3(-2)^2 - 12 = 3(4) - 12 = 12 - 12 = 0$$

2) $6x^2 - 54 = 0$

Solución.

$$6x^2 = 54 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{54}{6} = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -3$$

Comprobación:

$$6(3)^2 - 54 = 6(9) - 54 = 54 - 54 = 0$$
$$6(-3)^2 - 54 = 6(9) - 54 = 54 - 54 = 0$$

3) $-\frac{1}{5}x^2 + 5 = 0$

Solución.

Multiplicando por 5:

$$5\left(-\frac{1}{5}x^2 + 5\right) = 5(0)$$

$$-x^2 + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 = -25 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{-25}{-1} = 25 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{25}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 5, \quad x_2 = -5$$

Comprobación:

$$-\frac{1}{5}(5)^2 + 5 = -\frac{25}{5} + 5 = -5 + 5 = 0$$
$$-\frac{1}{5}(-5)^2 + 5 = -\frac{25}{5} + 5 = -5 + 5 = 0$$

4) $-6x^2 + 10 + 14x^2 + 2x^2 - 36 = x^2 - 8 + 7x^2 - 4$

Solución.

Reduciendo términos semejantes se tiene: $2x^2 - 14 = 0$

$$2x^2 = 14 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{14}{2} = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{7}, \quad x_2 = -\sqrt{7}$$

Comprobación:

$$-6\left(\sqrt{7}\right)^2 + 10 + 14\left(\sqrt{7}\right)^2 + 2\left(\sqrt{7}\right)^2 - 36^2 = -6(7) + 10 + 14(7) + 2(7) - 36 = -42 + 10 + 98 + 14 - 36 = 44$$
$$\left(\sqrt{7}\right)^2 - 8 + 7\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 - 8 + 7(7) = 7 - 8 + 49 = 48 - 4 = 44$$
$$44 \equiv 44$$
$$-6\left(-\sqrt{7}\right)^2 + 10 + 14\left(-\sqrt{7}\right)^2 + 2\left(-\sqrt{7}\right)^2 - 36^2 = -6(7) + 10 + 14(7) + 2(7) - 36 = -42 + 10 + 98 + 14 - 36 = 44$$
$$\left(-\sqrt{7}\right)^2 - 8 + 7\left(-\sqrt{7}\right)^2 = 7 - 8 + 7(7) = 7 - 8 + 49 = 48 - 4 = 44$$
$$44 \equiv 44$$

5) $8x^2+32=0$
Solución.

$$8x^2=-32 \quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{-32}{8}=-4 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{-4}$$, por lo tanto no existen soluciones reales.

- Sea una ecuación incompleta de la forma $ax^2+bx=0$

factorizando el primer miembro: $x(ax+b)=0$
aplicando la propiedad cero de los números reales[3]: $x=0$ y $ax+b=0$
despejando x de la segunda ecuación se obtiene: $x=-\frac{b}{a}$
Por lo tanto, las raíces de esta ecuación están dadas por:
$x_1=0$
$x_2=-\frac{b}{a}$
Nótese como una raíz siempre será cero y la otra siempre existe.

Es común que en muchos ejercicios el factor común es de la forma kx, donde k es el máximo común divisor de a y b, entonces si $ax^2+bx=0$, se tiene que $kx\left(\frac{a}{k}x+\frac{b}{k}\right)=0$

Ejemplos.
Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:
1) $2x^2-8x=0$
Solución.

$$2x^2-8x=0 \quad\Rightarrow\quad 2x(x-4)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2x=0 & \Rightarrow\quad x_1=0 \\ x-4=0 & \Rightarrow\quad x_2=4 \end{cases}$$

Comprobación:
$2(0)^2-8(0)=0$
$2(4)^2-8(4)=2(16)-32=32-32=0$

2) $5x^2+10x=0$
Solución.

$$5x^2+10x=0 \quad\Rightarrow\quad 5x(x+2)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 5x=0 & \Rightarrow\quad x_1=0 \\ x+2=0 & \Rightarrow\quad x_2=-2 \end{cases}$$

Comprobación:
$5(0)^2+10(0)=0$
$5(-2)^2+10(-2)=5(4)-20=20-20=0$

3) $-6x^2+28x=0$
Solución.

[3] Esta propiedad establece que si el producto de dos números es cero, entonces uno de ellos o ambos es cero.

$$-6x^2+28x=0 \quad \Rightarrow \quad -2x(3x-14)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x=0 & \Rightarrow \quad x_1=0 \\ 3x-14=0 & \Rightarrow \quad 3x=14 \quad \Rightarrow \quad x_2=\dfrac{14}{3} \end{cases}$$

4) $5x^2-7x-3x^2+8x-4x=2x^2+12x-9x^2-3x$
Solución.
Reduciendo términos semejantes se tiene: $9x^2-12x=0$

$$9x^2-12x=0 \quad \Rightarrow \quad 3x(3x-4)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x=0 & \Rightarrow \quad x_1=0 \\ 3x-4=0 & \Rightarrow \quad 3x=4 \quad \Rightarrow \quad x_2=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Comprobación:

$5(0)^2-7(0)-3(0)^2+8(0)-4(0)=0$

$2(0)^2+12(0)-9(0)^2-3(0)=0$

$0\equiv 0$

Comprobación:

$$5\left(\frac{4}{3}\right)^2-7\left(\frac{4}{3}\right)-3\left(\frac{4}{3}\right)^2+8\left(\frac{4}{3}\right)-4\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{80}{9}-\frac{28}{3}-\frac{48}{9}+\frac{32}{3}-\frac{16}{3}=\frac{80}{9}-\frac{84}{3}-\frac{48}{9}+\frac{96}{9}-\frac{48}{9}=-\frac{4}{9}$$

$$2\left(\frac{4}{3}\right)^2+12\left(\frac{4}{3}\right)-9\left(\frac{4}{3}\right)^2-3\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{32}{9}+16-16-4=\frac{32}{9}+\frac{144}{9}-\frac{144}{9}-\frac{36}{9}=-\frac{4}{9}$$

$$-\frac{4}{9}\equiv-\frac{4}{9}$$

5) $-\frac{3}{5}x^2-\frac{7}{2}x=0$
Solución.
Multiplicando por 10:

$$10\left(-\frac{3}{5}x^2-\frac{7}{2}x\right)=10(0) \quad \Rightarrow \quad -6x^2-35x=0$$

$$-6x^2-35x=0 \quad \Rightarrow \quad -x(6x+35)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x=0 & \Rightarrow \quad x_1=0 \\ 6x+35=0 & \Rightarrow \quad 6x=-35 \quad \Rightarrow \quad x_2=-\dfrac{35}{6} \end{cases}$$

Comprobación:

$$-\frac{3}{5}\left(-\frac{35}{6}\right)^2-\frac{7}{2}\left(-\frac{35}{6}\right)=-\frac{3}{5}\left(\frac{1225}{36}\right)+\frac{245}{12}=-\frac{245}{12}+\frac{245}{12}=0$$

VII.4.2 ECUACIONES COMPLETAS UTILIZANDO FÓRMULA GENERAL

Existe una fórmula general que puede aplicarse a cualquier ecuación de segundo grado en una variable y que permite conocer la naturaleza de las raíces.

Para resolver la ecuación de segundo grado en el caso general, se necesita que el primer miembro sea un cuadrado perfecto:

Sea la ecuación: $ax^2+bx+c=0$

se traspone el término independiente al segundo miembro: $ax^2+bx=-c$

dividiendo por a: $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

sumando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ para que el primer miembro sea un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

expresión que equivale a: $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$

acomodando el segundo miembro: $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

expresión que equivale a: $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

factorizando el trinomio cuadrado perfecto: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros: $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

aplicando propiedades de los radicales: $x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

se traspone el término $\frac{b}{2a}$ al segundo miembro: $x=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}$

acomodando convenientemente se llega a:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

expresión conocida como *fórmula general* para resolver una ecuación de segundo grado.

En la fórmula general, la cantidad: b^2-4ac es llamada *discriminante* de la ecuación y determina la naturaleza de las raíces, de acuerdo a lo siguiente:

- Si $b^2-4ac>0$, las raíces son reales y diferentes.
- Si $b^2-4ac=0$, las raíces son reales e iguales.
- Si $b^2-4ac<0$, las raíces son complejas conjugadas.

Ejemplos.
Aplicando la fórmula general, resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

1) $3x^2+21x+30=0$

Simplificando la ecuación para que la sustitución sea más sencilla: $x^2+7x+10=0$

$a=1,\ b=7,\ c=10$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-4(1)(10)}}{2(1)}=\frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-7\pm3}{2}$$

$$x_1=\frac{-7+3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$x_2=\frac{-7-3}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$

Comprobación:

$$3(-2)^2+21(-2)+30=3(4)-42+30=12-42+30=0$$

$$3(-5)^2+21(-5)+30=3(25)-105+30=75-105+30=0$$

2) $2x^2-14x+24=0$

Simplificando la ecuación para que la sustitución sea más sencilla: $x^2-7x+12=0$

$a=1,\ b=-7,\ c=12$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(12)}}{2(1)}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm1}{2}$$

$$x_1=\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$x_2=\frac{7-1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Comprobación:

$$2(4)^2-14(4)+24=2(16)-56+24=32-56+24=0$$

$$2(3)^2-14(3)+24=2(9)-42+24=18-42+24=0$$

3) $11x^2+7x+19=3-5x+8x^2+4$

Reduciendo términos semejantes se tiene: $3x^2+12x+12=0$

Simplificando la ecuación para que la sustitución sea más sencilla: $x^2+4x+4=0$

$a=1,\ b=4,\ c=4$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(4)}}{2(1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{-4\pm0}{2}$$

$$x_1=\frac{-4+0}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$x_2=\frac{-4-0}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Comprobación:

$$11(-2)^2+7(-2)+19=11(4)-14+19=44-14+19=49$$

$$3-5(-2)+8(-2)^2+4=3+10+8(4)+4=3+10+32+4=49$$

$$49\equiv49$$

4) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{10}{4} = 0$

Multiplicando por 12:

$$12\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{10}{4}\right) = 12(0)$$

$$2x^2 - 16x + 30 = 0$$

Simplificando la ecuación para que la sustitución sea más sencilla: $x^2 - 8x + 15 = 0$

$a = 1,\ b = -8,\ c = 15$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{8+2}{2} = \frac{20}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Comprobación:

$$\frac{1}{6}(5)^2 - \frac{4}{3}(5) + \frac{10}{4} = \frac{25}{6} - \frac{20}{3} + \frac{10}{4} = \frac{50}{12} - \frac{80}{12} + \frac{30}{12} = 0$$

$$\frac{1}{6}(3)^2 - \frac{4}{3}(3) + \frac{10}{4} = \frac{9}{6} - 4 + \frac{10}{4} = \frac{18}{12} - \frac{48}{12} + \frac{30}{12} = 0$$

5) $5x^2 + 8x + 7 = 0$

$a = 5,\ b = 8,\ c = 7$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(5)(7)}}{2(5)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 140}}{10} = \frac{-8 \pm \sqrt{-76}}{10}$, por lo tanto no existen soluciones reales.

VII.4.3 ECUACIONES COMPLETAS UTILIZANDO FACTORIZACIÓN

Toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación en la cual uno de sus miembros es un trinomio de segundo grado y el otro es cero. Muchos trinomios de segundo grado, pueden factorizarse como el producto de dos binomios que tienen un término en común[4].

El término común de los binomios es de grado uno ya que es raíz del término cuadrático. Para encontrar las raíces se resuelven las dos ecuaciones de primer grado.

Este método aplica única y exclusivamente si el miembro de la derecha es cero y si el primer miembro es factorizable de acuerdo a la forma que se expuso en los subtemas V.2.6 y V.2.7.

[4] De acuerdo a lo expuesto en la sección V.2.7, el último paso de la factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ consiste en dividir por a y el resultado final puede no ser el producto de dos binomios por un término común. Para resolver ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ no es necesario dividir por a, así que el resultado será el producto de dos binomios por un término común porque estrictamente no se completa la factorización.

Ejemplos.
Obtener las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado por factorización:

1) $x^2+6x+8=0$

$(x+4)(x+2)=0$

$x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-4$

$x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$

Comprobación:

$(-4)^2+6(-4)+8=16-24+8=0$

$(-2)^2+6(-2)+8=4-12+8=0$

2) $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=2$

$x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=3$

Comprobación:

$(2)^2-5(2)+6=4-10+6=0$

$(3)^2-5(3)+6=9-15+6=0$

3) $x^2+2x-35=0$

$(x+7)(x-5)=0$

$x+7=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-7$

$x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=5$

Comprobación:

$(-7)^2+2(-7)-35=49-14-35=0$

$(5)^2+2(5)-35=25+10-35=0$

4) $x^2-x-12=0$

$(x-4)(x+3)=0$

$x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=4$

$x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-3$

Comprobación:

$(4)^2-(4)-12=16-4-12=0$

$(-3)^2-(-3)-12=9+3-12=0$

5) $x^2-9x-52=0$

$(x-13)(x+4)=0$

$x-13=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=13$

$x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-4$

Comprobación:

$(13)^2-9(13)-52=169-117-52=0$

$(-4)^2-9(-4)-52=16+36-52=0$

6) $2x^2+3x-2=0$

$$2(2x^2)+2(3x)-2(2)=2(0)$$

$$(2x)^2+3(2x)-4=0$$

$$(2x+4)(2x-1)=0$$

$$2x+4=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=-4 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{4}{2}=-2$$

$$2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=1 \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{1}{2}$$

Comprobación:

$$2(-2)^2+3(-2)-2=2(4)-6-2=8-6-2=0$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)-2=2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{2}-\frac{4}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{2}=0$$

7) $3x^2-17x+10=0$

$$3(3x^2)-3(17x)+3(10)=3(0)$$

$$(3x)^2-17(3x)+30=0$$

$$(3x-15)(3x-2)=0$$

$$3x-15=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=15 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{15}{3}=5$$

$$3x-2=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=2 \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{2}{3}$$

Comprobación:

$$3(5)^2-17(5)+10=3(25)-85+10=75-85+10=0$$

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^2-17\left(\frac{2}{3}\right)+10=3\left(\frac{4}{9}\right)-\frac{34}{3}+10=\frac{4}{3}-\frac{34}{3}+\frac{30}{3}=0$$

8) $4x^2-4x-8=0$

$$4(4x^2)-4(4x)-4(8)=4(0)$$

$$(4x)^2-4(4x)-32=0$$

$$(4x-8)(4x+4)=0$$

$$4x-8=0 \quad \Rightarrow \quad 4x=8 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{8}{4}=2$$

$$4x+4=0 \quad \Rightarrow \quad 4x=-4 \quad \Rightarrow \quad x_2=-\frac{4}{4}=-1$$

Comprobación:

$$4(2)^2-4(2)-8=4(4)-8-8=16-8-8=0$$

$$4(-1)^2-4(-1)-8=4(1)+4-8=4+4-8=0$$

9) $5x^2+10x-15=0$

$$5(5x^2)+5(10x)-5(15)=5(0)$$

$$(5x)^2+10(5x)-75=0$$
$$(5x+15)(5x-5)=0$$
$$5x+15=0 \quad \Rightarrow \quad 5x=-15 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{15}{5}=-3$$
$$5x-5=0 \quad \Rightarrow \quad 5x=5 \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{5}{5}=1$$
Comprobación:
$$5(-3)^2+10(-3)-15=5(9)-30-15=45-30-15=0$$
$$5(1)^2+10(1)-15=5(1)+10-15=5+10-15=0$$

10) $6x^2+15x-36=0$
$$6\left(6x^2\right)+6(15x)-6(36)=6(0)$$
$$(6x)^2+15(6x)-216=0$$
$$(6x+24)(6x-9)=0$$
$$6x+24=0 \quad \Rightarrow \quad 6x=-24 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{24}{6}=-4$$
$$6x-9=0 \quad \Rightarrow \quad 6x=9 \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$
Comprobación:
$$6(-4)^2+15(-4)-36=6(16)-60-36=96-60-36=0$$
$$6\left(\frac{3}{2}\right)^2+15\left(\frac{3}{2}\right)-36=6\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{45}{2}-36=\frac{27}{2}+\frac{45}{2}-\frac{72}{2}=0$$

VII.4.4 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Al momento de plantear un problema que se modele como una ecuación de segundo grado, al resolverla se deben aceptar sólo los valores de la incógnita que cumplan las condiciones del problema y rechazar los que no los cumplan.

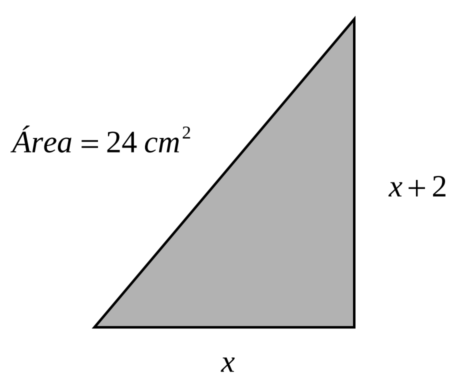
1) La suma de dos números es 29 y su producto 204, ¿cuáles son los números?
Solución.
El primer número es: x
El segundo número es: $29-x$
$$x(29-x)=204$$
$$29x-x^2=204 \quad \Rightarrow \quad x^2-29x+204=0$$
$$(x-12)(x-17)=0$$
$$x-12=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=12$$
$$x-17=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=17$$

2) Hallar tres números impares consecutivos positivos, tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 7.
Solución.

El primer número impar es: x
El segundo número impar es: $x+2$
El tercer número impar es: $x+4$
$(x+4)^2-(x+2)^2-x^2=7$
$x^2+8x+16-(x^2+4x+4)-x^2=7$
$x^2+8x+16-x^2-4x-4-x^2=7$
$-x^2+4x+5=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x-5=0$
$(x-5)(x+1)=0$
$x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=5$
$x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-1$
Se rechaza la segunda raíz por ser negativa.
Los números son: $5,\ 5+2,\ 5+4$, es decir: $5,\ 7,\ 9$

3) La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?
Solución.
La edad del hijo es: x
La edad del padre es: x^2
$x^2+24=2(x+24)$
$x^2+24=2x+48$
$x^2-2x-24=0$
$(x-6)(x+4)=0$
$x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=6$
$x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-4$
Se rechaza la segunda raíz por ser negativa.
$x^2=36$, por lo tanto, la edad del hijo es seis años y la del padre 36.

4) Un triángulo tiene un área de 24 cm^2 y la altura mide 2 cm. más que la base correspondiente. ¿Cuánto miden la base y la altura?
Solución.
La longitud de la base: x
La longitud de la altura: $x+2$
El área del triángulo es: $\frac{x(x+2)}{2}=24$
$x(x+2)=48$
$x^2+2x=48$
$x^2+2x-48=0$
$(x+8)(x-6)=0$
$x+8=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-8$
$x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=6$
Se rechaza la primera raíz por ser negativa.
La longitud de la altura es: $x+2=6+2=8$
Por lo tanto, la base mide 6 cm. y la altura mide 8 cm.



5) Una persona tiene 52 años de edad y su nieto 2. ¿Después de cuántos años la razón entre la edad del abuelo y del nieto será igual a los tres cuartos del tiempo transcurrido para que eso suceda?
Solución.
El tiempo transcurrido es: x
La edad del nieto después de x años es: $2+x$
La edad del abuelo después de x años es: $52+x$

$$\frac{52+x}{2+x}=\frac{3}{4}x$$

$$52+x=\frac{3}{4}x(2+x)$$

$$4(52+x)=4\left(\frac{3}{4}x(2+x)\right)$$

$$208+4x=6x+3x^2$$

$$3x^2+2x-208=0$$

$$a=3,\ b=2,\ c=-208$$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(3)(-208)}}{2(3)}=\frac{-2\pm\sqrt{4+2496}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{2500}}{6}=\frac{-2\pm 50}{6}$$

$$x_1=\frac{-2+50}{6}=\frac{48}{6}=8$$

$$x_2=\frac{-2-50}{6}=\frac{-52}{6}=-\frac{26}{3}$$

Se rechaza la segunda raíz por ser negativa.
Por lo tanto, el tiempo que deberá transcurrir serán 8 años.

6) Un conjunto de personas alquiló un microbús en $1{,}200$ pesos. Como tres personas no fueron, las demás debieron pagar 20 pesos más de lo acordado. ¿Cuántas viajaban originalmente?
Solución.
El número de personas es: x
Cada persona debió pagar originalmente: $\frac{1{,}200}{x}$ pesos.

$$(x-3)\left(\frac{1{,}200}{x}+20\right)=1{,}200$$

$$x(x-3)\left(\frac{1{,}200}{x}+20\right)=x(1{,}200)\quad\Rightarrow\quad(x-3)(1{,}200+20x)=1{,}200x$$

$$1{,}200x+20x^2-3{,}600-60x=1{,}200x\quad\Rightarrow\quad 20x^2-60x-3{,}600=0$$

$$x^2-3x-180=0$$

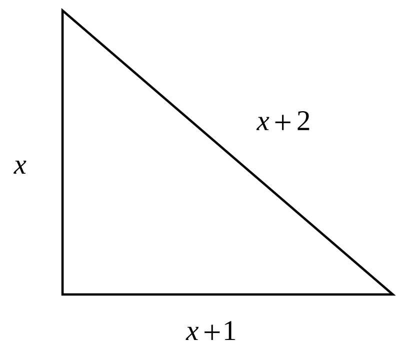
$$(x-15)(x+12)=0$$

$$x-15=0\quad\Rightarrow\quad x_1=15$$

$$x+12=0\quad\Rightarrow\quad x_2=-12$$

Se rechaza la segunda raíz por ser negativa, se tiene que originalmente viajaban 15 personas.

7) Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos. Las medidas están en cm.
Solución.
El cateto menor es: x
El cateto mayor es: $x+1$
La hipotenusa es: $x+2$



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$$
$$x^2+x^2+2x+1=x^2+4x+4$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$
$$x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3$$
$$x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-1$$

Se rechaza la segunda raíz por ser negativa.
$x+1=3+1=4$, $x+2=3+2=5$
Las longitudes de los catetos son: 3 cm. y 4 cm., la longitud de la hipotenusa es 5 cm.

8) La diferencia de dos números naturales es 7 y su suma multiplicada por el número menor es 184. Hallar los números.
Solución.
El número menor es x
El número mayor es $7+x$

$$(x+7+x)x=184$$
$$x^2+7x+x^2=184$$
$$2x^2+7x-184=0$$
$$a=2,\ b=7,\ c=-184$$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4(2)(-184)}}{2(2)}=\frac{-7\pm\sqrt{49+1{,}472}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{1{,}521}}{4}=\frac{-7\pm 39}{4}$$
$$x_1=\frac{-7+39}{4}=\frac{32}{4}=8$$
$$x_2=\frac{-7-39}{4}=\frac{-46}{4}=-\frac{23}{2}$$

Se rechaza la segunda raíz por ser negativa.
$7+x=7+8=15$
Por lo tanto, los números son 8 y 15.

9) Los tiempos empleados por dos pintores para pintar cada uno un metro cuadrado difieren entre sí en un minuto. Trabajando conjuntamente emplean una hora en pintar 27 metros cuadrados. ¿En cuánto tiempo pinta cada uno un metro cuadrado?
Solución.
El número de minutos que necesita el pintor más rápido para pintar un metro cuadrado es: x
El número de minutos empleados por el otro pintor es: $x+1$
La fracción de metro cuadrado que pinta el más rápido en un minuto es: $\frac{1}{x}$

La fracción de metro cuadrado que pinta el otro en un minuto es: $\frac{1}{x+1}$

La fracción de metro cuadrado que pintan entre los dos en un minuto es: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$

Trabajando juntos pintan 27 metros cuadrados en una hora, así que en un minuto pintan: $\frac{27}{60}\ m^2$

Por tanto: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{27}{60}$

$$60x(x+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)=60x(x+1)\frac{27}{60}$$

$$60(x+1)+60x=27x(x+1)$$

$$60x+60+60x=27x^2+27x$$

$$27x^2-93x-60=0$$

$$a=27,\ b=-93,\ c=-60$$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x=\frac{-(-93)\pm\sqrt{(-93)^2-4(27)(-60)}}{2(27)}=\frac{93\pm\sqrt{8{,}649+6{,}480}}{54}=\frac{93\pm\sqrt{15{,}129}}{54}=\frac{93\pm 123}{54}$$

$$x_1=\frac{93+123}{54}=\frac{216}{54}=4$$

$$x_2=\frac{93-123}{54}=\frac{-30}{54}=-\frac{5}{9}$$

Se rechaza la segunda raíz por ser negativa.

$x+1=4+1=5$, así que los pintores emplean 4 y 5 minutos, respectivamente para pintar un metro cuadrado.

VII.4.5 GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Para graficar una ecuación de segundo grado, se establece la ecuación $y=ax^2+bx+c$. La solución de $ax^2+bx+c=0$ son los valores x que hacen $y=0$, es decir los puntos $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$ y $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$ donde la curva $y=ax^2+bx+c$ cruza el eje x.

El resultado gráfico siempre es una curva que recibe el nombre de *parábola*, cuyas características son:

1) Si $a>0$, la parábola se abre hacia arriba:
2) Si $a<0$, la parábola se abre hacia abajo:
3) La intersección con el eje y es el punto $(0,c)$
4) Como las soluciones dependen del signo del discriminante $\Delta=b^2-4ac$, se tiene que:
   - Si $\Delta>0$, la ecuación tiene soluciones reales y distintas, por lo tanto la parábola corta en dos puntos al eje x.
   - Si $\Delta=0$, la ecuación tiene soluciones reales iguales, por lo tanto la parábola es tangente al eje x.
   - Si $\Delta<0$, la ecuación no tiene soluciones reales, por lo tanto la parábola no corta el eje x.

La ecuación $y = ax^2 + bx + c$ puede evaluarse para todo $x \in \mathbf{R}$ y por ello se unen los puntos obtenidos para obtener sus gráficas.

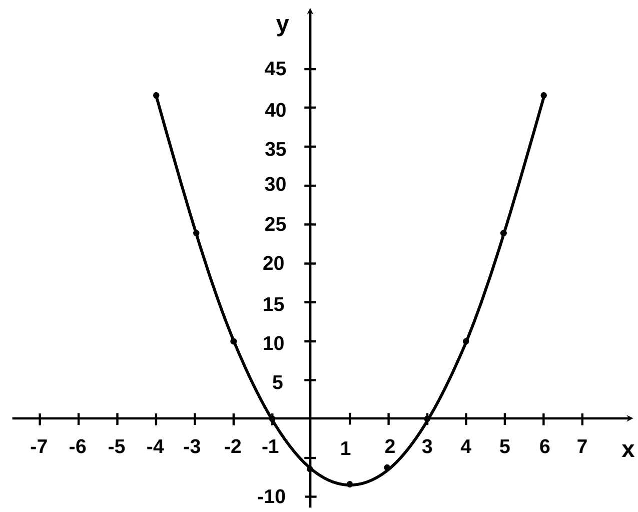
Para fines prácticos, tabulando valores diferentes de x se pueden obtener los valores de y, generando puntos de coordenadas (x, y) que se localizan en el plano coordenado y que al unirse conforman la parábola.

Si las coordenadas de los puntos son grandes puede ser necesario modificar la escala en los ejes x y y, lo que provoca que las gráficas se deformen. Esto significa que su aspecto es diferente al que realmente tienen.

Ejemplos.
Graficar las siguientes ecuaciones de segundo grado:

1) $y = 2x^2 - 4x - 6$
Solución.

x	y
-4	42
-3	24
-2	10
-1	0
0	-6
1	-8
2	-6
3	0
4	10
5	24
6	42

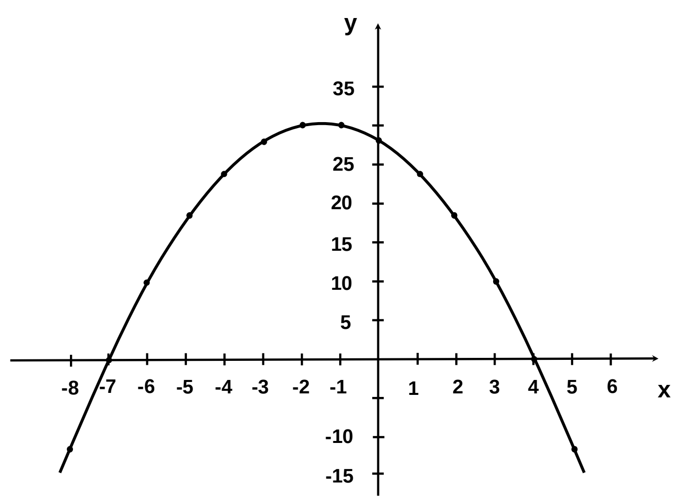


La parábola se abre hacia arriba y las raíces de la ecuación son diferentes:
$x_1 = 3$
$x_2 = -1$

2) $y = -x^2 - 3x + 28$

Solución.

x	y
-8	-12
-7	0
-6	10
-5	18
-4	24
-3	28
-2	30
-1	30
0	28
1	24
2	18
3	10
4	0
5	-12



La parábola se abre hacia abajo y las raíces de la ecuación son diferentes:

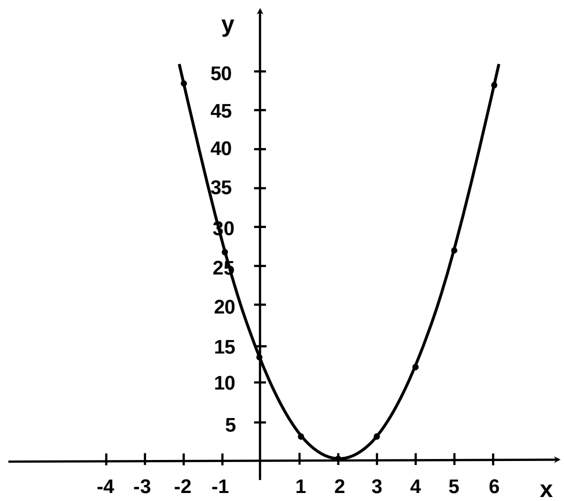
$x_1 = -7$

$x_2 = 4$

3) $y = 3x^2 - 12x + 12$

Solución.

x	y
-2	48
-1	27
0	12
1	3
2	0
3	3
4	12
5	27
6	48



La parábola se abre hacia arriba y las raíces de la ecuación son iguales:

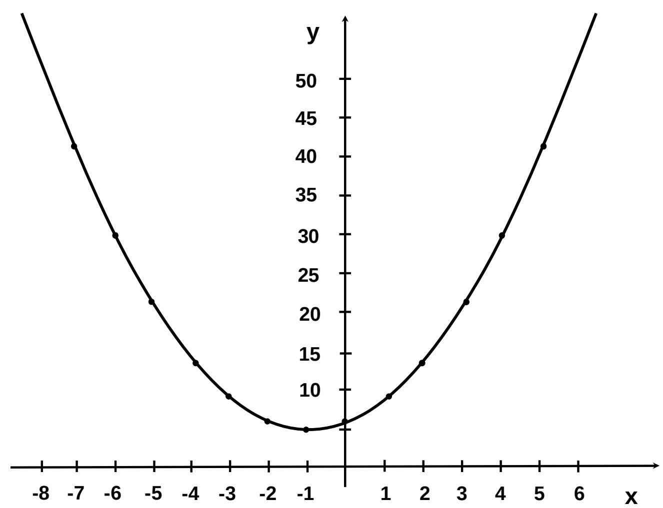
$x_1 = 2$

$x_2 = 2$

4) $y = x^2 + 2x + 6$

Solución.

x	y
-7	41
-6	30
-5	21
-4	14
-3	9
-2	6
-1	5
0	6
1	9
2	14
3	21
4	30
5	41



La parábola se abre hacia arriba y las raíces de la ecuación no son reales.

VII.5 DESIGUALDADES DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE

Una desigualdad de segundo grado o desigualdad cuadrática, tiene la forma:

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{o} \quad ax^2+bx+c\geq 0 \quad \text{o} \quad ax^2+bx+c<0 \quad \text{o} \quad ax^2+bx+c\leq 0$$

donde $a,\ b$ y c son números reales y $a\neq 0$. Su solución generalmente representa un intervalo o la unión de dos intervalos de números reales.

Para resolver una desigualdad cuadrática se usan los conceptos de *número crítico* y *número de prueba*.

Un número crítico de la desigualdad mencionada es una raíz real de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$.

Si r_1 y r_2 son números críticos y $r_1<r_2$, entonces el polinomio ax^2+bx+c sólo puede cambiar de signo algebraico en r_1 y r_2 por la tanto el signo más o menos de ax^2+bx+c será constante en cada uno de los intervalos $(-\infty, r_1)$, (r_1, r_2), (r_2, ∞).

Para determinar si estos intervalos son o no solución de la inecuación, se evalúa con un número x de prueba arbitrario en ax^2+bx+c para cada intervalo. Los resultados obtenidos sirven para ubicar el conjunto de soluciones de la desigualdad.

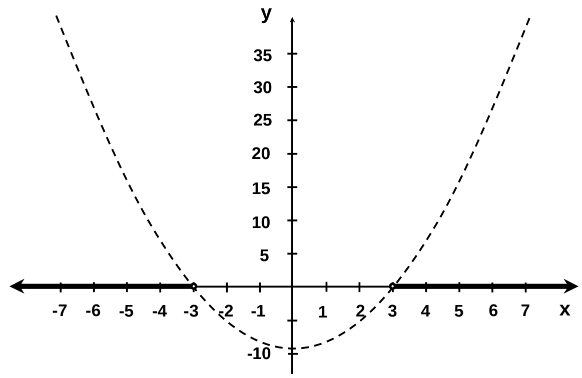
Un procedimiento sistemático para la resolución de inecuaciones cuadráticas es el siguiente:

1. Se trasladan todos los términos de la inecuación al miembro de la izquierda.
2. Se hallan los números críticos r_1 y r_2 de la ecuación cuadrática y se forman los intervalos $(-\infty, r_1)$, (r_1, r_2), (r_2, ∞).
3. Se prueban con valores de fácil sustitución localizados en dichos intervalos para determinar cuáles son los que satisfacen la desigualdad.

Ejemplos.
Resolver las siguientes inecuaciones:

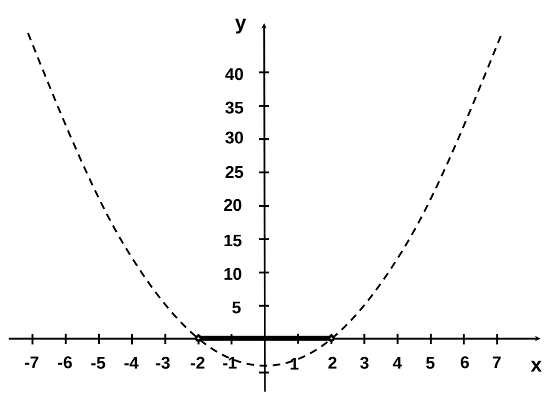
1) $x^2-9>0$
Solución.
$x^2=9$
$x=\pm\sqrt{9}$
$x=\pm 3$
Los números críticos son:
$r_1=3$ y $r_2=-3$
los intervalos solución pueden ser $(-\infty,-3)$, $(-3,3)$ y $(3,\infty)$
probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $x^2-9>0$:
para $x=-4$ del intervalo $(-\infty,-3)$ se tiene: $(-4)^2-9=16-9=7>0$
para $x=0$ del intervalo $(-3,3)$ se tiene: $0^2-9=0-9=-9<0$
para $x=4$ del intervalo $(3,\infty)$ se tiene: $(4)^2-9=16-9=7>0$
Los valores que cumplen la desigualdad son el primero y el tercero, por lo que la solución es: $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$.

La gráfica de la parábola se ubica por arriba del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son mayores que cero:



$(-\infty, 3] \cup [3, \infty)$

2) $x^2 - 4 < 0$
Solución.
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{2}$
$x = \pm 2$
Los números críticos son:
$r_1 = 2$ y $r_2 = -2$
los intervalos solución pueden ser $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$
probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $x^2 - 4 < 0$:
para $x = -5$ del intervalo $(-\infty, -2)$ se tiene: $(-5)^2 - 4 = 25 - 4 = 21 > 0$
para $x = 0$ del intervalo $(-2, 2)$ se tiene: $0^2 - 4 = 0 - 4 = -4 < 0$
para $x = 5$ del intervalo $(2, \infty)$ se tiene: $5^2 - 4 = 25 - 4 = 21 > 0$
El valor que cumple la desigualdad es el segundo, por lo que la solución es: $(-2, 2)$.
La gráfica de la parábola se ubica por abajo del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son menores que cero:



$(-2, 2)$

3) $2x^2 \geq 10x$

Solución.

$2x^2 - 10x \geq 0$

$2x^2 - 10x = 0$

$x(2x - 10) = 0$

Los números críticos son:

$r_1 = 0$

$2x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 10 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{10}{2} = 5$

los intervalos solución pueden ser: $(-\infty, 0]$, $[0, 5]$ y $[5, \infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $2x^2 - 10x > 0$:

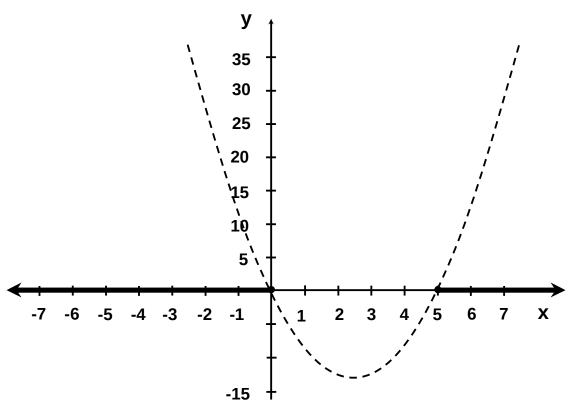
para $x = -1$ del intervalo $(-\infty, 0]$ se tiene: $2(-1)^2 - 10(-1) = 2 + 10 = 12 > 0$

para $x = 3$ del intervalo $[0, 5]$ se tiene: $2(3)^2 - 10(3) = 18 - 30 = -12 < 0$

para $x = 6$ del intervalo $[5, \infty)$ se tiene: $2(6)^2 - 10(6) = 72 - 60 = 12 > 0$

Los valores que cumplen la desigualdad son el primero y el tercero, por lo que la solución es: $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$.

La gráfica de la parábola se ubica por arriba del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son mayores o iguales que cero:



$(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

4) $3x^2 \leq -12x$

Solución.

$3x^2 + 12x \leq 0$

$3x^2 + 12x = 0$

$x(3x + 12) = 0$

Los números críticos son:

$r_1 = 0$

$3x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = -12 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{-12}{3} = -4$

los intervalos solución pueden ser: $\left(-\infty,-4\right]$, $\left[-4,0\right]$ y $\left[0,\infty\right)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $3x^2+12x<0$:

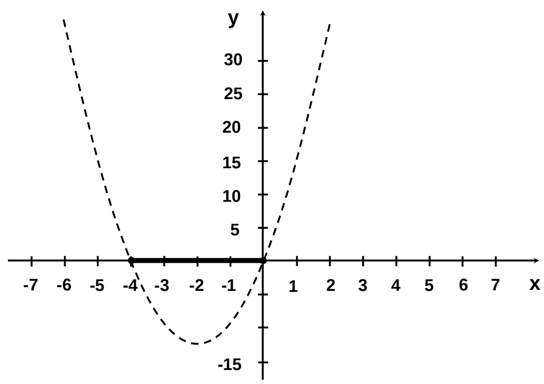
para $x=-5$ del intervalo $\left(-\infty,-4\right]$ se tiene: $3(-5)^2+12(-5)=75-60=15>0$

para $x=-2$ del intervalo $\left[-4,0\right]$ se tiene: $3(-2)^2+12(-2)=12-24=-12<0$

para $x=1$ del intervalo $\left[0,\infty\right)$ se tiene: $3(1)^2+12(1)=3+12=15>0$

El valor que cumple la desigualdad es el segundo, por lo que la solución es: $\left[-4,0\right]$.

La gráfica de la parábola se ubica por abajo del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son menores que cero:



$\left[-4,0\right]$

5) $x^2-8<2x$

Solución.

Trasponiendo términos: $x^2-2x-8<0$

$x^2-2x-8=0$

$a=1,\ b=-2,\ c=-8$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-8)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}$$

Los números críticos son:

$$r_1=\frac{2+6}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$r_2=\frac{2-6}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Nótese que la ecuación también puede factorizarse y los números críticos pueden obtenerse más rápidamente:

$(x-4)(x+2)=0$

$x-4=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=4$

$x+2=0 \quad\Rightarrow\quad r_2=-2$

los intervalos solución pueden ser: $(-\infty,-2)$, $(-2,4)$ y $(4,\infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $x^2 - 2x - 8 < 0$:

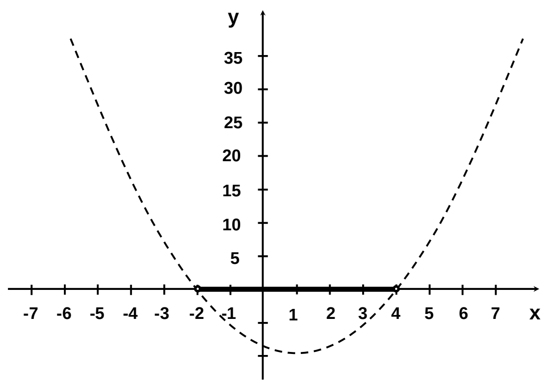
para $x = -3$ del intervalo $(-\infty, -2)$ se tiene: $(-3)^2 - 2(-3) - 8 = 9 + 6 - 8 = 7 > 0$

para $x = 0$ del intervalo $(-2, 4)$ se tiene: $0^2 - 2(0) - 8 = 0 + 0 - 8 = -8 < 0$

para $x = 5$ del intervalo $(4, \infty)$ se tiene: $5^2 - 2(5) - 8 = 25 - 10 - 8 = 7 > 0$

Por lo tanto, el valor que cumple la desigualdad es el segundo, por lo que la solución es: $(-2, 4)$.

La gráfica de la parábola se ubica por abajo del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son menores que cero:



$(-2, 4)$

6) $2x^2 + 4x \geq 30$

Solución.

Trasponiendo términos: $2x^2 + 4x - 30 \geq 0$

Simplificando: $x^2 + 2x - 15 \geq 0$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$(x+5)(x-3) = 0$

$x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -5$

$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = 3$

los intervalos solución pueden ser $(-\infty, -5]$, $[-5, 3]$ y $[3, \infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $2x^2 + 4x - 30 \geq 0$:

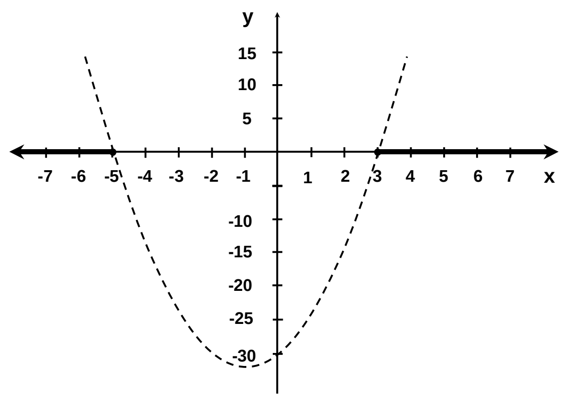
para $x = -6$ del intervalo $(-\infty, -5]$ se tiene: $2(-6)^2 + 4(-6) - 30 = 72 - 24 - 30 = 18 > 0$

para $x = 0$ del intervalo $[-5, 3]$ se tiene: $2(0)^2 + 4(0) - 30 = 0 - 0 - 30 = -30 < 0$

para $x = 4$ del intervalo $[3, \infty)$ se tiene: $2(4)^2 + 4(4) - 30 = 32 + 16 - 30 = 18 > 0$

Los valores que cumplen la desigualdad son el primero y el tercero, por lo que la solución es: $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$.

La gráfica de la parábola se ubica por arriba del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son mayores que cero:



$(-\infty,-5] \cup [3,\infty)$

7) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x<4$

Solución.

$6\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x\right)<6(4)$

$x^2+2x<24$

Trasponiendo términos:

$x^2+2x-24<0$

$a=1,\ b=2,\ c=-24$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-24)}}{2(1)}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{100}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm10}{2}$$

Los números críticos son:

$$r_1=\frac{-2+10}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$r_2=\frac{-2-10}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

los intervalos solución pueden ser $(-\infty,-6)$, $(-6,4)$ y $(4,\infty)$

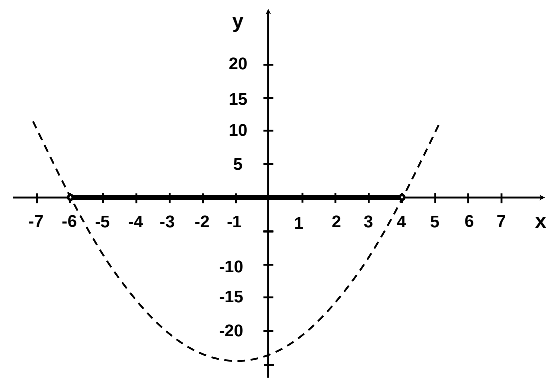
probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $x^2+2x-24<0$:

para $x=-7$ del intervalo $(-\infty,-6)$ se tiene: $(-7)^2+2(-7)-24=49-14-24=11>0$

para $x=0$ del intervalo $(-6,4)$ se tiene: $0^2+2(0)-24=0-0-24=-24<0$

para $x=5$ del intervalo $(4,\infty)$ se tiene: $(5)^2+2(5)-24=25+10-24=11>0$

Por lo tanto, el valor que cumple la desigualdad es el segundo, por lo que la solución es: $(-6,4)$.
La gráfica de la parábola se ubica por abajo del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son menores que cero:



$(-6,4)$

8) $5x^2-2x+1<x^2+2x$
Solución.
Trasponiendo términos: $4x^2-4x+1<0$
$4x^2-4x+1=0$
$a=4,\ b=-4,\ c=1$
Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(4)(1)}}{2(4)}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{8}=\frac{4\pm 0}{8}$$

Los números críticos son:

$$r_1=\frac{4+0}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$r_2=\frac{4-0}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

los intervalos solución pueden ser $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

probando con dos números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $4x^2-4x+1<0$:

para $x=0$ del intervalo $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ se tiene: $4(0)^2-4(0)+1=0-0+1>0$

para $x=1$ del intervalo $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ se tiene: $4(1)^2-4(1)+1=4-4+1=1>0$

Ninguno de los valores que cumplen la desigualdad, por lo que no tiene solución.

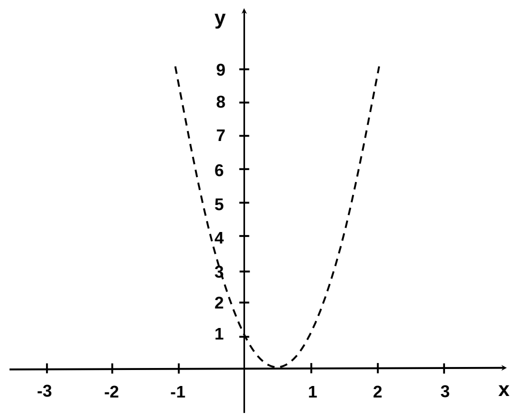
Nótese como la desigualdad $4x^2-4x+1<0$ se puede expresar como:
$(2x)^2-2(2x)+1<0$

Factorizando:

$(2x-1)^2 < 0$

Puesto que el cuadrado de cualquier número real siempre es mayor o igual a cero, entonces se comprueba que esta inecuación no tiene solución.

Toda la parábola se localiza por arriba del eje x, por eso no hay solución:



9) $-6x^2+8x+1<-3x^2+4x+5$

Solución.

Trasponiendo términos: $-3x^2+4x-4<0$

Convirtiendo esta desigualdad a un trinomio cuadrado perfecto, se tiene:

$$-3x^2+4x-4<0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2+4x-4>0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2+4x>-4 \quad \Rightarrow \quad 3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)>-4$$

$$\Rightarrow \quad 3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)>-4+\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2>-\frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(x-\frac{2}{3}\right)^2>-\frac{8}{9}$$

Puesto que el cuadrado de cualquier número real siempre es mayor o igual a cero, entonces se trata de una desigualdad absoluta.

Toda la parábola se localiza por abajo del eje x y su solución es cualquier número real: