SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE DESIGUALDADES

UNIDAD VIII

VIII.1 SISTEMAS DE ECUACIONES

Una *ecuación lineal con dos incógnitas* x y y es una expresión de la forma $ax+by=c$, donde $a,b,c\in\mathbf{R}$ y a y b son diferentes de cero.

Toda ecuación lineal con dos incógnitas tiene un número ilimitado de soluciones de la forma (x,y) y su gráfica determina una recta.

Ejemplos.

1) La ecuación lineal $2x+4y=20$ tiene entre sus ilimitadas soluciones a los valores: $(-2,6)$, $(0,5)$, $(8,1)$ y $(12,-1)$

2) La ecuación lineal $3x-y=-15$ tiene entre sus ilimitadas soluciones a los valores: $(5,0)$, $(-2,9)$, $(1,18)$ y $(-3,6)$

Un *sistema de ecuaciones* es un conjunto de ecuaciones que poseen incógnitas. Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, se abarca el conjunto de todas ellas con una llave.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con incógnitas x y y, también llamado *ecuaciones simultáneas de dos por dos* es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{array}\right\}$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ son coeficientes reales y b_1, b_2 son términos independientes. En cada una de las ecuaciones, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero.

Los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que surgen del planteamiento de un problema, generalmente no tienen la forma estándar, sin embargo, debe obtenerse.

Resolver un sistema de este tipo es encontrar los pares de números x y y que satisfacen ambas ecuaciones, si existen. Gráficamente, una solución del sistema es un punto común a ambas rectas $P(x,y)$.

En un sistema de dos ecuaciones lineales:

- Si las dos rectas que se cruzan en un punto, éste representa la solución del sistema. En este caso el sistema es *compatible determinado*.
- Si las dos rectas coinciden en todos sus puntos, tiene infinitas soluciones. En este caso el sistema es compatible *indeterminado*.
- Si las dos rectas son paralelas, no tienen ningún punto común. En este caso el sistema es *incompatible* y no tiene solución.

VIII.2 MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES Y DOS INCÓGNITAS

Existen cinco métodos para resolver sistemas de ecuaciones:

- Igualación
- Suma y resta (eliminación)
- Sustitución
- Determinantes
- Gráfico

VIII.2.1 MÉTODO DE IGUALACIÓN

El método de igualación consiste en realizar los siguientes pasos:

- Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- Se igualan las expresiones despejadas y se obtiene una ecuación lineal para la otra incógnita.
- Se resuelve la ecuación lineal.
- Se sustituye este valor en cualquiera de las dos expresiones despejadas a fin de obtener el valor de la otra.
- Se realiza la comprobación.

Ejemplos.
Aplicando el método de igualación, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\left.\begin{array}{l} 4x-2y=10 \\ 3x+5y=14 \end{array}\right\}$

Solución.

De la primera ecuación se despeja x: $x=\frac{10+2y}{4}=\frac{5+y}{2}$

de la segunda ecuación también se despeja x: $x=\frac{14-5y}{3}$

se igualan estas dos últimas ecuaciones: $\frac{5+y}{2}=\frac{14-5y}{3}$

resolviendo para y:

$$3(5+y)=2(14-5y)$$

$$15+3y=28-10y$$

$$3y+10y=28-15$$

$$13y=13 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{13}{13}=1$$

sustituyendo en la primera ecuación despejada, se obtiene el valor de la otra incógnita:

$$x=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Por lo tanto: $x=3$ y $y=1$. Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 4(3)-2(1)=12-2=10 \\ 3(3)+5(1)=9+5=14 \end{array}\right\}$

2) $\left.\begin{array}{r} 9x-3y=18 \\ 2x+8y=-48 \end{array}\right\}$

Solución.

De la primera ecuación se despeja x: $x=\frac{18+3y}{9}=\frac{6+y}{3}$

de la segunda ecuación también se despeja x: $x=\frac{-48-8y}{2}=-24-4y$

se igualan estas dos últimas ecuaciones: $\frac{6+y}{3}=-24-4y$

resolviendo para y:

$2(6+y)=3(-24-4y) \quad \Rightarrow \quad 12+2y=-72-12y \quad \Rightarrow \quad 2y+12y=-72-12$

$14y=--84 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-84}{14}=-6$

sustituyendo en la primera ecuación despejada, se obtiene el valor de la otra incógnita:

$x=\frac{6+(-6)}{3}=\frac{0}{3}=0$

Por lo tanto: $x=0$ y $y=-6$. Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 9(0)-3(-6)=0+18=18 \\ 2(0)+8(-6)=0-48=-48 \end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{r} x-\frac{4x+1}{9}=\frac{2y-5}{3} \\ y-\frac{3y+2}{7}=\frac{x+18}{10} \end{array}\right\}$

Solución.

La primera ecuación, se multiplica por 9:

$9\left(x-\frac{4x+1}{9}\right)=9\left(\frac{2y-5}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad 9x-4x-1=6y-15 \quad \Rightarrow \quad 5x-6y=-14$

la segunda ecuación, se multiplica por 70:

$70\left(y-\frac{3y+2}{7}\right)=70\left(\frac{x+18}{10}\right) \quad \Rightarrow \quad 70y-30y-20=7x+126 \quad \Rightarrow \quad -7x+40y=146$

el sistema se convierte a su forma estándar: $\left.\begin{array}{r} 5x-6y=-14 \\ -7x+40y=146 \end{array}\right\}$

de la primera ecuación se despeja y: $y=\frac{-14-5x}{-6}$

de la segunda ecuación también se despeja y: $y=\frac{146+7x}{40}$

se igualan estas dos últimas ecuaciones: $\frac{-14-5x}{-6}=\frac{146+7x}{40}$

resolviendo para x:

$40(-14-5x)=-6(146+7x) \quad \Rightarrow \quad -560-200x=-876-42x \quad \Rightarrow \quad -200x+42x=-876+560$

$-158x=-316 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-316}{-158}=2$

sustituyendo en la primera ecuación despejada, se obtiene el valor de la otra incógnita:

$$y=\frac{146+7(2)}{40}=\frac{146+14}{40}=\frac{160}{40}=4$$

Por lo tanto: $x=2$ y $y=4$. Comprobación: $2-\frac{4(2)+1}{9}=2-\frac{8+1}{9}=2-\frac{9}{9}=2-1=1$

$$\frac{2(4)-5}{3}=\frac{8-5}{3}=\frac{3}{3}=1$$

$$1\equiv 1$$

$$4-\frac{3(4)+2}{7}=4-\frac{12+2}{7}=4-\frac{14}{7}=4-2=2$$

$$\frac{2+18}{10}=\frac{2+18}{10}=\frac{20}{10}=2$$

$$2\equiv 2$$

VIII.2.2 MÉTODO DE SUMA Y RESTA (ELIMINACIÓN)

El método de suma y resta, también llamado de eliminación consiste en efectuar el procedimiento siguiente:

- Se multiplica cada ecuación por constantes de modo que los coeficientes de la variable a eliminar resulten iguales en valor absoluto pero con signos opuestos.
- Se suman ambas ecuaciones para obtener una nueva ecuación en términos solamente de la otra variable.
- Se resuelve la ecuación lineal.
- Se despeja la otra variable de cualquiera de las ecuaciones del sistema.
- Se sustituye el valor obtenido en la expresión despejada para obtener el valor de la otra.
- Se realiza la comprobación.

Ejemplos.
Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de eliminación:

1) $\left.\begin{array}{r}4x-2y=2\\-5x+4y=-13\end{array}\right\}$

Solución.

Se multiplica la primera ecuación por 2 y se suma a la segunda: $\left.\begin{array}{r}8x-4y=4\\-5x+4y=-13\end{array}\right\}$

$$\begin{array}{rr}\hline 3x & =-9\end{array}$$

$$x=\frac{-9}{3}=-3$$

de la primera ecuación se despeja la otra incógnita y se sustituye el valor obtenido:

$$y=\frac{2-4x}{-2}=-1+2x=-1+2(-3)=-1-6=-7$$

Por lo tanto: $x=-3$ y $y=-7$. Comprobación: $\left.\begin{array}{r}4(-3)-2(-7)=-12+14=2\\-5(-3)+4(-7)=15-28=-13\end{array}\right\}$

2) $\left.\begin{array}{r}-8x+14y=-20\\-5x+7y=-16\end{array}\right\}$

Solución.

Se multiplica la segunda ecuación por -2 y se suma a la primera:

$$\begin{array}{r} -8x+14y=-20 \\ 10x-14y=32 \\ \hline 2x \quad\quad =12 \end{array}$$

$$x=\frac{12}{2}=6$$

de la primera ecuación se despeja la otra incógnita y se sustituye el valor obtenido:

$$y=\frac{-20+8x}{14}=\frac{-10+4x}{7}=\frac{-10+4(6)}{7}=\frac{-10+24}{7}=\frac{14}{7}=2$$

Por lo tanto: $x=6$ y $y=2$. Comprobación: $\left.\begin{array}{l} -8(6)+14(2)=-48+28=-20 \\ -5(6)+7(2)=-30+14=-16 \end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{r} 5x-9y=139 \\ 15x+2y=98 \end{array}\right\}$

Solución.

Se multiplica la primera ecuación por -3 y se suma a la segunda:

$$\begin{array}{r} -15x+27y=-417 \\ 15x+2y=98 \\ \hline 29y=-319 \end{array}$$

$$y=\frac{-319}{29}=-11$$

de la primera ecuación se despeja la otra incógnita y se sustituye el valor obtenido:

$$x=\frac{139+9y}{5}=\frac{139+9(-11)}{5}=\frac{139-99}{5}=\frac{40}{5}=8$$

Por lo tanto: $x=8$ y $y=-11$. Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 5(8)-9(-11)=40+99=139 \\ 15(8)+2(-11)=120-22=98 \end{array}\right\}$

VIII.2.3 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El método de sustitución consiste en efectuar los siguientes pasos:

- Despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones.
- Sustituir la expresión despejada en la otra ecuación.
- Se resuelve la ecuación lineal, generalmente fraccionaria.
- Se sustituye este valor en la expresión despeja a fin de obtener el valor de la otra.
- Se realiza la comprobación.

Ejemplos.

Mediante el método de sustitución, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\left.\begin{array}{r} 9x+7y=-17 \\ 4x+2y=-12 \end{array}\right\}$

Solución.

De la primera ecuación se despeja x: $x=\dfrac{-17-7y}{9}$

se sustituye en la segunda ecuación: $4\left(\frac{-17-7y}{9}\right)+2y=-12$

multiplicando por 9: $9\left[4\left(\frac{-17-7y}{9}\right)+2y\right]=9(-12) \quad \Rightarrow \quad 4(-17-7y)+18y=-108$

$-68-28y+18y=-108 \quad \Rightarrow \quad -28y+18y=-108+68 \quad \Rightarrow \quad -10y=-40$

$y=\frac{-40}{-10}=4$

sustituyendo en la ecuación despejada: $x=\frac{-17-7y}{9}=\frac{-17-7(4)}{9}=\frac{-17-28}{9}=\frac{-45}{9}=-5$

Por lo tanto: $x=-5$ y $y=4$. Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 9(-5)+7(4)=-45+28=-17 \\ 4(-5)+2(4)=-20+8=-12 \end{array}\right\}$

2) $\left.\begin{array}{l} -2x+3y=9 \\ 7x-9y=-31 \end{array}\right\}$

Solución.

De la primera ecuación se despeja x: $x=\frac{9-3y}{-2}$

se sustituye en la segunda ecuación: $7\left(\frac{9-3y}{-2}\right)-9y=-31$

multiplicando por -2: $(-2)\left[7\left(\frac{9-3y}{-2}\right)-9y\right]=(-2)(-31) \quad \Rightarrow \quad 7(9-3y)+18y=62$

$63-21y+18y=62 \quad \Rightarrow \quad -21y+18y=62-63 \quad \Rightarrow \quad -3y=-1$

$y=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

sustituyendo en la ecuación despejada: $x=\frac{9-3y}{-2}=\frac{9-3\left(\frac{1}{3}\right)}{-2}=\frac{9-1}{-2}=\frac{8}{-2}=-4$

Por lo tanto: $x=-4$ y $y=\frac{1}{3}$. Comprobación: $\left.\begin{array}{l} -2(-4)+3\left(\frac{1}{3}\right)=8+1=9 \\ 7(-4)-9\left(\frac{1}{3}\right)=-28-3=-31 \end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{l} 10x+4y=-34 \\ -5x+2y=13 \end{array}\right\}$

Solución.

De la primera ecuación se despeja x: $x=\frac{-34-4y}{10}=\frac{-17-2y}{5}$

se sustituye en la segunda ecuación: $-5\left(\frac{-17-2y}{5}\right)+2y=13$

simplificando: $-(-17-2y)+2y=13 \quad \Rightarrow \quad 17+2y+2y=13 \quad \Rightarrow \quad 2y+2y=13-17 \quad \Rightarrow \quad 4y=-4$

$y = \frac{-4}{4} = -1$

sustituyendo en la ecuación despejada: $x = \frac{-34-4y}{10} = \frac{-34-4(-1)}{10} = \frac{-34+4}{10} = \frac{-30}{10} = -3$

Por lo tanto: $x = -3$ y $y = -1$.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 10(-3)+4(-1) = -30-4 = -34 \\ -5(-3)+2(-1) = 15-2 = 13 \end{array}\right\}$

VIII.2.4 MÉTODO DE DETERMINANTES

Dado un arreglo de números de la forma: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, su *determinante*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

denotado por Δ, es el resultado de la operación: $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ y representa el producto de números que conforman su diagonal principal (la que se dirige hacia abajo) menos el producto de números que conforman su diagonal secundaria (la que se dirige hacia arriba).

Ejemplos.
Calcular los siguientes determinantes:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - 3(2) = 20 - 6 = 14$

2) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -2(6) - 1(-5) = -12 + 5 = -7$

3) $\begin{vmatrix} -9 & 7 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (-9)(-1) - (-4)(7) = 9 + 28 = 37$

4) $\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = \frac{2}{5}(10) - (-3)(0) = 4 + 0 = 4$

Dado un sistema de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array}\right\}$$

- El determinante del Sistema Δ es el determinante del arreglo formado por los coeficientes de las incógnitas.
- El determinante de la incógnita Δx es el que se obtiene sustituyendo en el arreglo del sistema la columna de los coeficientes de la incógnita x por la columna de los términos independientes.
- El determinante de la incógnita Δy es el que se obtiene sustituyendo en el arreglo del sistema la columna de los coeficientes de la incógnita y por la columna de los términos independientes.

La *Regla de Cramer* establece que dado un sistema de ecuaciones lineales cuyos términos independientes no son cero, el valor de cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la incógnita por el determinante del sistema. Esto es:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

En este método solo interesan los coeficientes numéricos incluyendo su signo y, en ambos casos, el denominador es el mismo.

Ejemplos.
Por medio de determinantes, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\left.\begin{aligned} 2x-3y&=12 \\ -4x+5y&=-14 \end{aligned}\right\}$

Solución.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -14 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{12(5)-(-14)(-3)}{2(5)-(-4)(-3)}=\frac{60-42}{10-12}=\frac{18}{-2}=-9$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -4 & -14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{2(-14)-(-4)(12)}{2(5)-(-4)(-3)}=\frac{-28+48}{10-12}=\frac{20}{-2}=-10$$

Por lo tanto: $x=-9$ y $y=-10$. Comprobación: $\left.\begin{aligned} 2(-9)-3(-10)&=-18+30=12 \\ -4(-9)+5(-10)&=36-50=-14 \end{aligned}\right\}$

2) $\left.\begin{aligned} -3x+2y&=-9 \\ 4x-5y&=26 \end{aligned}\right\}$

Solución.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 26 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{-9(-5)-26(2)}{(-3)(-5)-4(2)}=\frac{45-52}{15-8}=\frac{-7}{7}=-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-3 & -9\\ 4 & 26\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 4 & -5\end{vmatrix}}=\frac{(-3)(26)-4(-9)}{(-3)(-5)-4(2)}=\frac{-78+36}{15-8}=\frac{-42}{7}=-6$$

Por lo tanto: $x=-1$ y $y=-6$. Comprobación: $\left.\begin{array}{r}-3(-1)+2(-6)=3-12=-9\\ 4(-1)-5(-6)=-4+30=26\end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{r}6x+4y=7\\ -9x+16y=17\end{array}\right\}$

Solución.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}7 & 4\\ 17 & 16\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & 4\\ -9 & 16\end{vmatrix}}=\frac{7(16)-17(4)}{(6)(16)-(-9)(4)}=\frac{112-68}{96+36}=\frac{44}{132}=\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}6 & 7\\ -9 & 17\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & 4\\ -9 & 16\end{vmatrix}}=\frac{6(17)-(-9)(7)}{(6)(16)-(-9)(4)}=\frac{102+63}{96+36}=\frac{165}{132}=\frac{5}{4}$$

Por lo tanto: $x=\frac{1}{3}$ y $y=\frac{5}{4}$. Comprobación: $\left.\begin{array}{r}6\left(\frac{1}{3}\right)+4\left(\frac{5}{4}\right)=2+5=7\\ -9\left(\frac{1}{3}\right)+16\left(\frac{5}{4}\right)=-3+20=17\end{array}\right\}$

4) $\left.\begin{array}{r}5x-3y=8\\ 10x-6y=14\end{array}\right\}$

Solución.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8 & -3\\ 14 & -6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -3\\ 10 & -6\end{vmatrix}}=\frac{8(-6)-14(-3)}{(5)(-6)-10(-3)}=\frac{-48+42}{-30+30}=\frac{-6}{0}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 8\\ 10 & 14\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -3\\ 10 & -6\end{vmatrix}}=\frac{5(14)-10(8)}{(5)(-6)-10(-3)}=\frac{70-80}{-30+30}=\frac{-10}{0}$$

Al no existir división por cero, el sistema es incompatible.

VIII.2.5 MÉTODO GRÁFICO

Como ya se mencionó, cada ecuación lineal de un sistema representa una recta. Esto implica que la representación de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en un par de rectas y recuérdese que:

- Si se cortan, el sistema es compatible determinado y las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema.
- Si las rectas son coincidentes (son la misma recta), el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son todos los puntos de la recta.
- Si las rectas son paralelas, el sistema es incompatible.

Para fines de graficación conviene despejar de ambas ecuaciones la variable y. Se puede elaborar una tabla de valores o se ubican los puntos en que cruzan a los ejes coordenados para cada recta, se trazan y se analiza su comportamiento.

Ejemplos.
Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método gráfico:

1) $\left.\begin{matrix} x+2y=5 \\ 3x-6y=-9 \end{matrix}\right\}$

Solución
Para la primera ecuación:

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad 2y=5 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{5}{2}=2.5$

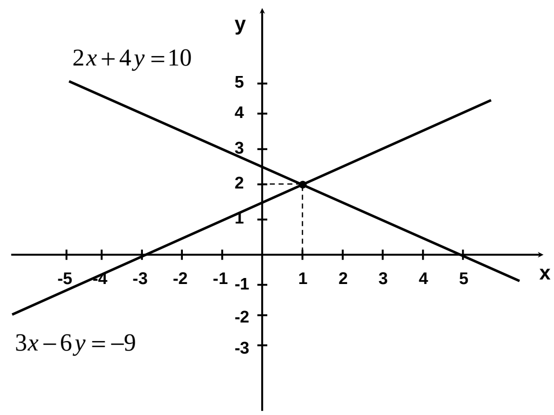
Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=10 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{10}{2}=5$

la recta pasa por los puntos $(0,2.5)$ y $(5,0)$
Para la segunda ecuación:

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad -6y=-9 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-9}{-6}=1.5$

Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=-9 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-9}{3}=-3$

la recta pasa por los puntos $(0,1.5)$ y $(-3,0)$



graficando se obtiene que la solución es el punto de intersección (x,y), es decir $(1,2)$

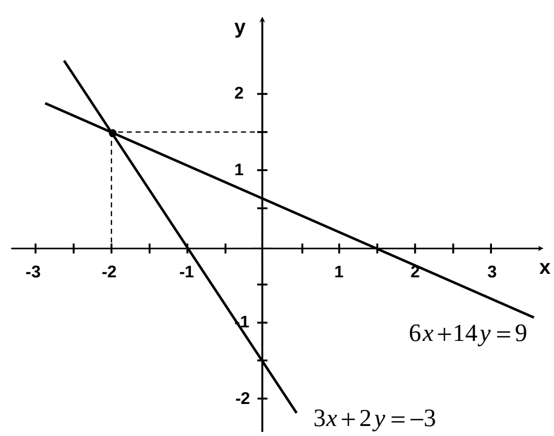
comprobación: $\left.\begin{matrix} 2(1)+4(2)=2+8=10 \\ 3(1)-6(2)=3-12=-9 \end{matrix}\right\}$

2) $\left.\begin{matrix} 6x+14y=9 \\ 3x+2y=-3 \end{matrix}\right\}$

Solución
Para la primera ecuación:

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad 14y=9 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{9}{14}\approx 0.6428$

Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad 6x=9 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1.5$



la recta pasa por los puntos $(0, 0.6428)$ y $(1.5, 0)$
Para la segunda ecuación:

Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-3}{2} = -1.5$

Si $y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-3}{3} = -1$

la recta pasa por los puntos $(0, -1.5)$ y $(-1, 0)$

graficando se obtiene que la solución es el punto de intersección (x, y), es decir $(-2, 1.5)$

comprobación: $\left.\begin{array}{l} 6(-2)+14(1.5)=-12+21=9 \\ 3(-2)+2(1.5)=-6+3=-3 \end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{l} 3x+3y=6 \\ 5x-10y=10 \end{array}\right\}$

Solución
Para la primera ecuación:

Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{6}{3} = 2$

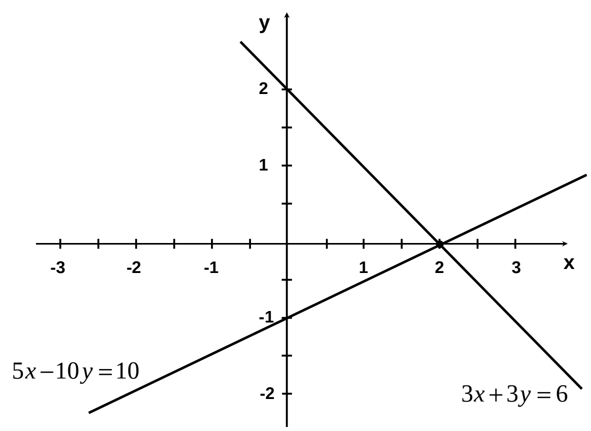
Si $y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{3} = 2$

la recta pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(2, 0)$
Para la segunda ecuación:

Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad -10y = 10 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10}{-10} = -1$

Si $y = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10}{5} = 2$

la recta pasa por los puntos $(0, -1)$ y $(2, 0)$



graficando se obtiene que la solución es el punto de intersección (x, y), es decir $(2, 0)$

comprobación: $\left.\begin{array}{l} 3(2)+3(0)=6+0=6 \\ 5(2)-10(0)=10-0=10 \end{array}\right\}$

VIII.3 PROBLEMAS CON SISTEMAS DE DOS ECUACIONES Y DOS INCÓGNITAS

Muchos problemas técnicos y científicos requieren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Se trata de un tema fundamental para todas las disciplinas que utilizan las matemáticas de una manera u otra. En muchos problemas existe dependencia entre las diferentes magnitudes o variables que intervienen, y a menudo, se expresa en forma de ecuación lineal.

Dentro del proceso de resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales, se pueden definir cinco etapas:

- Leer el problema
- Definir las incógnitas principales de forma precisa

- Traducción matemática del problema para plantearlo
- Resolución
- Interpretación de las soluciones para contrastar la adecuación de las soluciones obtenidas.

Ejemplos.

1) En una granja, se tienen cien animales entre puercos y gallinas. Si en total suman 240 patas, ¿cuántos animales tengo de cada clase?
Solución.
x es el número de puercos
y es el número de gallinas
como cada puerco tiene cuatro patas y cada gallina dos, el sistema está dado por:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=100 \\ 4x+2y=240 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=100 \\ 2x+y=120 \end{array}\right\}$$

resolviendo por eliminación, se multiplica la primera ecuación por -2 y se suma a la segunda:

$$\left.\begin{array}{r} -2x-2y=-200 \\ 2x+y=120 \end{array}\right\}$$

$$-y=-80$$

$$y=\frac{-80}{-1}=80$$

de la primera ecuación se despeja la otra incógnita y se sustituye el valor obtenido:

$$x=100-y=100-80=20$$

Por lo tanto, hay 20 puercos y 80 gallinas.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 20+80=100 \\ 4(20)+2(80)=80+160=240 \end{array}\right\}$

2) Una cuerda mide doce metros y se corta en dos partes de tal manera que una es dos metros más grande que la otra. ¿Cuales son las nuevas medidas de las cuerdas?
Solución.
x es la longitud del pedazo más grande
y es la longitud del pedazo más pequeño

$$\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x=y+2 \end{array}\right\}$$

ordenando:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$$

resolviendo por eliminación, se suma la primera ecuación a la segunda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$$

$$2x=14$$

$$x=\frac{14}{2}=7$$

de la primera ecuación se despeja la otra incógnita y se sustituye el valor obtenido:

$$y=12-x \quad \Rightarrow \quad y=12-7=5$$

Por lo tanto, los pedazos miden 7 y 5 metros.

Comprobación: $\left.\begin{aligned} 7+5=12 \\ 7-5=2 \end{aligned}\right\}$

3) Seis Kg. de piñones y cinco Kg. de nueces costaron $2{,}270$ pesos y cinco Kg. de piñones y cuatro de nueces costaron $1{,}880$ pesos. Hallar el precio de un kilogramo de piñones y uno de nueces.

Solución.

x es el precio en pesos de un Kg. de piñones

y es el precio en pesos de un Kg. de nueces

$$\left.\begin{aligned} 6x+5y=2{,}270 \\ 5x+4y=1{,}880 \end{aligned}\right\}$$

resolviendo por determinantes:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2{,}270 & 5 \\ 1{,}880 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{2{,}270(4)-1{,}880(5)}{6(4)-5(5)}=\frac{9{,}080-9{,}400}{24-25}=\frac{-320}{-1}=320$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 2{,}270 \\ 5 & 1{,}880 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{6(1{,}880)-5(2{,}270)}{6(4)-5(5)}=\frac{11{,}280-11{,}350}{24-25}=\frac{-70}{-1}=70$$

Por lo tanto, un Kg. de piñones vale 320 pesos y uno de nueces vale 70 pesos.

Comprobación: $\left.\begin{aligned} 6(320)+5(70)=1{,}920+350=2{,}270 \\ 5(320)+4(70)=1{,}600+280=1{,}880 \end{aligned}\right\}$

4) Paola tiene 27 años más que su hija Andrea. Dentro de 8 años, la edad de Paola doblará a la de Andrea. ¿Cuántos años tiene cada una?

Solución.

x es la edad de Paola

y es la edad de Andrea

$$\left.\begin{aligned} x=y+27 \\ x+8=2(y+8) \end{aligned}\right\}$$

simplificando:

$$\left.\begin{aligned} x-y=27 \\ x+8=2y+16 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x-y=27 \\ x-2y=8 \end{aligned}\right\}$$

resolviendo por eliminación, se multiplica la primera ecuación por -1 y se suma a la segunda:

$$\left.\begin{aligned} -x+y=-27 \\ x-2y=8 \end{aligned}\right\}$$

$$-y=-19$$

$$y=\frac{-19}{-1}=19$$

de la primera ecuación se despeja la otra incógnita y se sustituye el valor obtenido:

$x = 27 + y = 27 + 19 = 46$

Por lo tanto, Paola tiene 46 años y Andrea tiene 19 años.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 46 - 19 = 27 \\ 46 - 2(19) = 46 - 38 = 8 \end{array}\right\}$

5) La diferencia de dos números es 14, y la cuarta parte de su suma es 13. Hallar los números.
Solución.
x es el número mayor
y es el número menor

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 14 \\ \frac{1}{4}(x + y) = 13 \end{array}\right\}$$

simplificando:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 14 \\ x + y = 4(13) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x - y = 14 \\ x + y = 52 \end{array}\right\}$$

resolviendo por eliminación, se suma la primera ecuación a la segunda:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 14 \\ \underline{x + y = 52} \end{array}\right\}$$

$$2x \quad = 66$$

$$x = \frac{66}{2} = 33$$

de la primera ecuación se despeja la otra incógnita y se sustituye el valor obtenido:

$$-y = 14 - x \quad \Rightarrow \quad y = -14 + x = -14 + 33 = 19$$

Por lo tanto, los números son 33 y 19.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 33 - 19 = 14 \\ 33 + 19 = 52 \end{array}\right\}$

6) Si a los dos términos de una fracción se añade 3, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$, y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$. Hallar la fracción.

Solución.
x es el numerador
y es el denominador
$\frac{x}{y}$ es la fracción buscada.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+3}{y+3} = \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

simplificando: $\left.\begin{array}{l} 2(x+3)=1(y+3) \\ 3(x-1)=1(y-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+6=y+3 \\ 3x-3=y-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y=-3 \\ 3x-y=2 \end{array}\right\}$

resolviendo por igualación, de la primera ecuación se despeja x: $x=\frac{-3+y}{2}$

de la segunda ecuación también se despeja x: $x=\frac{2+y}{3}$

se igualan estas dos últimas ecuaciones: $\frac{-3+y}{2}=\frac{2+y}{3}$

resolviendo para y:

$3(-3+y)=2(2+y)$

$-9+3y=4+2y$

$3y-2y=4+9$

$y=13$

sustituyendo en la primera ecuación despejada, se obtiene el valor de la otra incógnita:

$x=\frac{-3+13}{2}=\frac{10}{2}=5$

Por lo tanto, la fracción es $\frac{5}{13}$

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} \frac{5+3}{13+3}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2} \\ \frac{5-1}{13-1}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \end{array}\right\}$

7) El precio del boleto para un concierto es de 225 pesos para público en general, y 150 pesos para estudiantes. La taquilla recaudó $77{,}775$ pesos por la venta de 450 boletos. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

Solución.

x es el número de boletos vendidos a público en general

y es el número de boletos vendidos a estudiantes

$\left.\begin{array}{l} x+y=450 \\ 225x+150y=77{,}775 \end{array}\right\}$

resolviendo por eliminación, se multiplica la primera ecuación por -225 y se suma a la segunda:

$$\left.\begin{array}{r} -225x-225y=-101{,}250 \\ 225x+150y=77{,}775 \end{array}\right\}$$
$$\overline{\qquad -75y=-23{,}475}$$

$y=\frac{-23{,}475}{-75}=313$

de la primera ecuación se despeja la otra incógnita y se sustituye el valor obtenido:

$x=450-y=450-313=137$

Por lo tanto, se vendieron 137 boletos a público en general y 313 a estudiantes.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 137+313=450 \\ 225(137)+150(313)=30{,}825+46{,}950=77{,}775 \end{array}\right\}$

8) Una llave A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otra llave B. Abiertas simultáneamente, llenan el depósito en dos horas. ¿Cuánto tarda cada una por separado?
Solución.

x son las horas que tarda la llave A en llenar el depósito, así que en una hora llena $\frac{1}{x}$ del depósito

y son las horas que tarda la llave B en llenar el depósito, así que en una hora llena $\frac{1}{y}$ del depósito

Las dos llaves tardan dos horas en llenar el depósito, así que en una hora llenan $\frac{1}{2}$ del depósito

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \\ x=2y \end{array}\right\}$$

sustituyendo la segunda ecuación en la primera se tiene:

$$\frac{1}{2y}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$$

multiplicando por $2y$:

$$2y\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y}\right)=2y\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 1+2=y \quad \Rightarrow \quad y=3$$

sustituyendo en la segunda ecuación: $x=2(3)=6$

Por lo tanto, la llave A llena el depósito en 6 horas y la llave B lo hace en 3 horas.

Comprobación: $$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3+6}{18}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2} \\ 2(3)=6 \end{array}\right\}$$

9) Un bote que navega por un río recorre 15 kilómetros en hora y media a favor de la corriente y 12 kilómetros en dos horas contra la corriente. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.
Solución.

x es la velocidad en Km. por hora del bote en agua tranquila

y es la velocidad en Km. por hora del río

$x+y$ es la velocidad del bote a favor de la corriente

$x-y$ es la velocidad del bote contra la corriente

$$velocidad=\frac{distancia}{tiempo} \quad \Rightarrow \quad tiempo=\frac{distancia}{velocidad}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{15}{x+y}=1.5 \\ \frac{12}{x-y}=2 \end{array}\right\}$$

simplificando:

$$\left.\begin{array}{l} 15=1.5x+1.5y \\ 12=2x-2y \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 1.5x+1.5y=15 \\ 2x-2y=12 \end{array}\right\}$$

resolviendo por determinantes:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}15 & 1.5\\ 12 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1.5 & 1.5\\ 2 & -2\end{vmatrix}}=\frac{15(-2)-12(1.5)}{1.5(-2)-2(1.5)}=\frac{-30-18}{-3-3}=\frac{-48}{-6}=8$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1.5 & 15\\ 2 & 12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1.5 & 1.5\\ 2 & -2\end{vmatrix}}=\frac{1.5(12)-2(15)}{1.5(-2)-2(1.5)}=\frac{18-30}{-3-3}=\frac{-12}{-6}=2$$

Por lo tanto, la velocidad del bote en agua tranquila es de $8\frac{Km}{hr}$ y la velocidad del río es de $2\frac{Km}{hr}$.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l}1.5(8)+1.5(2)=12+3=15\\ 2(8)-2(2)=16-4=12\end{array}\right\}$

VIII.4 SISTEMAS DE DOS INECUACIONES Y DOS INCÓGNITAS

Un *sistema de inecuaciones lineales con una incógnita* es el conjunto formado por dos o más inecuaciones lineales de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+c_1>0\\ a_2x+c_2<0\\ \cdots \qquad \cdots\\ a_nx+c_n\geq 0\end{array}\right\}$$

o cualquier otro signo de desigualdad, donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son coeficientes reales y $c_1, c_2, \cdots, c_n$ son términos independientes.

La solución de un sistema de este tipo es un conjunto de números reales x que satisfagan simultáneamente todas y cada una de las desigualdades. La solución, en caso de existir, suele expresarse en forma de intervalo y se debe tener cuidado en expresar correctamente si es abierto o cerrado según el signo de desigualdad utilizado.

Particularmente, un sistema de dos inecuaciones lineales con incógnita x, es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+c_1>0\\ a_2x+c_2<0\end{array}\right\}$$

o cualquier otro signo de desigualdad. Resolver un sistema de este tipo es encontrar el intervalo de números reales x que satisface ambas inecuaciones, si existe.

Ejemplos.
Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

1) $\left.\begin{matrix} 5x-4>12-3x \\ 7x+9>34+2x \end{matrix}\right\}$

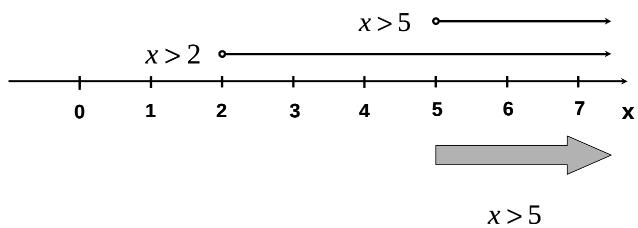
Solución.
De la primera inecuación:

$$5x+3x>12+4 \quad \Rightarrow \quad 8x>16 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{16}{8} \quad \Rightarrow \quad x>2$$

de la segunda inecuación:

$$7x-2x>34-9 \quad \Rightarrow \quad 5x>25 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{25}{5} \quad \Rightarrow \quad x>5$$

el conjunto solución es la intersección de ambos intervalos que corresponde al intervalo señalado por la flecha, por lo tanto es $x>5$



2) $\left.\begin{matrix} 11x-23<-3+6x \\ -5x+4>-8-x \end{matrix}\right\}$

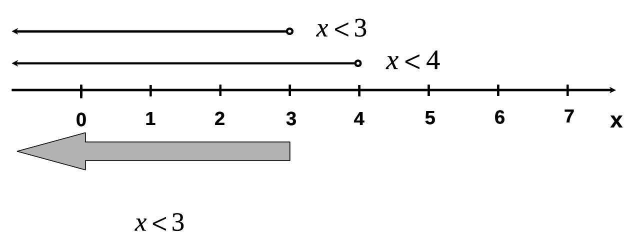
Solución.
De la primera inecuación:

$$11x-6x<-3+23 \quad \Rightarrow \quad 5x<20 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{20}{5} \quad \Rightarrow \quad x<4$$

de la segunda inecuación:

$$-5x+x>-8-4 \quad \Rightarrow \quad -4x>-12 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{-12}{-4} \quad \Rightarrow \quad x<3$$

el conjunto solución es la intersección de ambos intervalos que corresponde al intervalo señalado por la flecha, por lo tanto es $x<3$



3) $\left.\begin{matrix} -9x+4+8x<7+2x \\ -3x-6<10-9x+2 \end{matrix}\right\}$

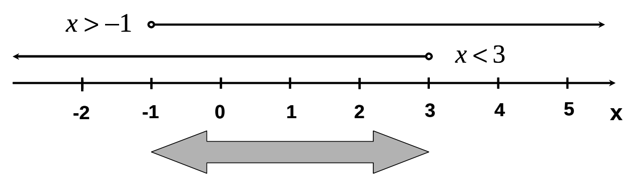
Solución.
De la primera inecuación:

$$-9x+8x-2x<7-4 \quad \Rightarrow \quad -3x<3 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{3}{-3} \quad \Rightarrow \quad x>-1$$

de la segunda inecuación:

$$-3x+9x<10+2+6 \quad \Rightarrow \quad 6x<18 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{18}{6} \quad \Rightarrow \quad x<3$$

el conjunto solución es la intersección de ambos intervalos que corresponde al intervalo señalado por la flecha, por lo tanto es $-1<x<3$



$-1<x<3$

4) $\left.\begin{matrix} 8x+6>15+2x+3 \\ -2x-8>-11-4+5x \end{matrix}\right\}$

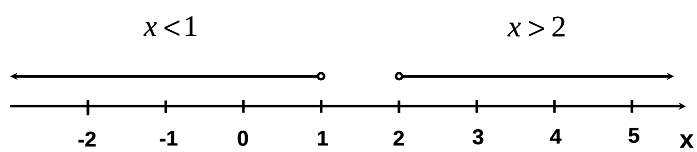
Solución.
De la primera inecuación:

$$8x-2x>15+3-6 \quad \Rightarrow \quad 6x>12 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{12}{6} \quad \Rightarrow \quad x>2$$

de la segunda inecuación:

$$-2x-5x>-11-4+8 \quad \Rightarrow \quad -7x>-7 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{-7}{-7} \quad \Rightarrow \quad x<1$$

al no haber intersección de ambos intervalos, no hay solución.



$$Solución=\phi$$

5) $\left.\begin{matrix} 9x-3\le 4x+7 \\ 8x+4\le 12x+16 \end{matrix}\right\}$

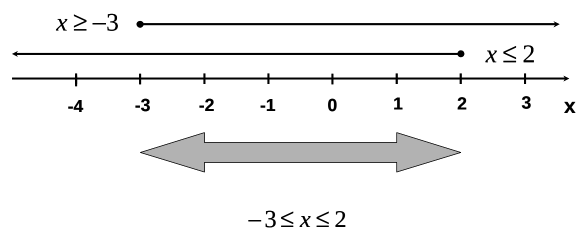
Solución.
De la primera inecuación:

$$9x-4x\le 7+3 \quad\Rightarrow\quad 5x\le 10 \quad\Rightarrow\quad x\le\frac{10}{5} \quad\Rightarrow\quad x\le 2$$

de la segunda inecuación:

$$8x-12x\le 16-4 \quad\Rightarrow\quad -4x\le 12 \quad\Rightarrow\quad x\ge\frac{12}{-4} \quad\Rightarrow\quad x\ge -3$$

el conjunto solución es la intersección de ambos intervalos que corresponde al intervalo señalado por la flecha, por lo tanto es $-3\le x\le 2$



Un sistema de dos inecuaciones lineales con incógnitas x y y, es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x+a_{12}y>b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y<b_2 \end{array}\right\}$$

o cualquier otro signo de desigualdad, donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ son coeficientes reales y b_1, b_2 son términos independientes. En cada una de las inecuaciones, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero. Resolver un sistema de este tipo es obtener el semiplano solución de las dos desigualdades e identificar su intersección.

Obtener la solución de un sistema de este tipo supone obtener el hiperplano solución de cada una de las inecuaciones que lo forman y determinar la intersección de todos ellos.

La solución de un sistema de n inecuaciones lineales con dos incógnitas es siempre un conjunto *convexo*. Se llama conjunto convexo a una región del plano tal que para dos puntos cualesquiera de la misma, el segmento que los une está íntegramente contenido en dicha región. Como casos particulares, un conjunto convexo puede quedar reducido a una recta, a una semirrecta, a un segmento, a un punto o al conjunto vacío.

Los segmentos que delimitan un conjunto convexo se llaman bordes o lados y, la intersección de ellos, vértices. Los vértices y puntos de los lados que pertenezcan a la solución del sistema de inecuaciones se denominan puntos extremos. Un conjunto convexo puede ser cerrado o abierto respecto a cada lado o vértice según se incluya éste o no en la solución. Puede ser acotado o no acotado según su área sea o no finita.

Ejemplos.
Resolver los siguientes sistemas de dos inecuaciones lineales con dos incógnitas.

1) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-4>0 \\ x-y+1>0 \end{array}\right\}$

Solución.
Convirtiendo a igualdad la primera inecuación: $2x+y-4=0$

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad y-4=0 \quad \Rightarrow \quad y=4$

Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-4=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=4 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4}{2}=2$

la recta pasa por los puntos $(0,4)$ y $(2,0)$

Para representar gráficamente la solución de la primera inecuación se elige un punto que no esté en la recta y se comprueba si verifica o no la desigualdad. Por ejemplo, tomando el punto $P_1\,(1,3)$ se aprecia que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $2(1)+(3)-4=2+3-4=1>0$. Esto significa que la región que incluye a ese punto es solución de esta desigualdad.

Convirtiendo a igualdad la segunda inecuación: $x-y+1=0$

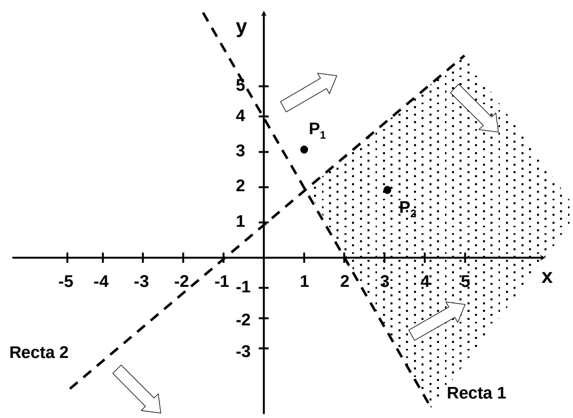
Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad -y=-1 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-1}{-1}=1$

Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$

la recta pasa por los puntos $(0,1)$ y $(-1,0)$

Para representar gráficamente la solución de la segunda inecuación se elige un punto que no esté en la recta y se comprueba si verifica o no la desigualdad. Por ejemplo, tomando el punto $P_2\,(3,2)$ se observa que cumple la inecuación ya que al sustituir se obtiene $3-2+1=2>0$. Esto significa que la región que incluye a ese punto es solución de esta desigualdad.

El conjunto solución es la intersección de las dos regiones, formando el semiplano sombreado.



2) $\left.\begin{matrix} -x+y-3>0 \\ x+2y-10>0 \end{matrix}\right\}$

Solución.

Convirtiendo a igualdad la primera inecuación: $-x+y-3=0$

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad y-3=0 \quad \Rightarrow \quad y=3$

Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad -x-3=0 \quad \Rightarrow \quad -x=3 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{-1}=-3$

la recta pasa por los puntos $(0,3)$ y $(-3,0)$

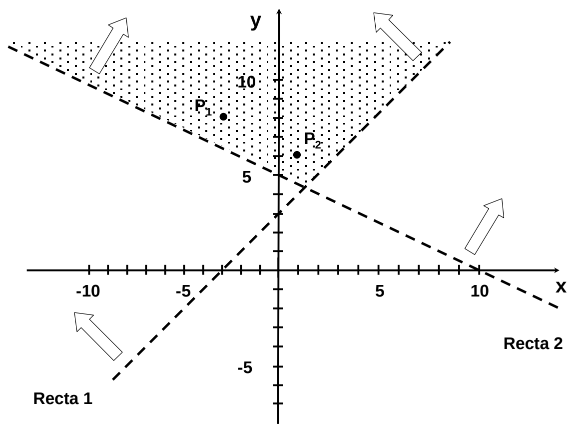
Se elige un punto que no esté en la recta para verificar si cumple o no la desigualdad. Por ejemplo, tomando al punto $P_1\left(-3,8\right)$ se tiene que $-\left(-3\right)+8-3=3+8-3=8>0$, esto es, cumple la inecuación, por lo que la región que incluye a ese punto es solución de esta desigualdad.
Convirtiendo a igualdad la segunda inecuación: $x+2y-10=0$

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad 2y=10 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{10}{2}=5$

Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad x-10=0 \quad \Rightarrow \quad x=10$

la recta pasa por los puntos $\left(0,5\right)$ y $\left(10,0\right)$

Se elige un punto que no esté en la recta para verificar si cumple o no la desigualdad. Por ejemplo, tomando al punto $P_2\left(1,6\right)$ se tiene que $1+2\left(6\right)-10=1+12-10=3>0$, esto es, cumple la inecuación, por lo que la región que incluye a ese punto es solución de esta desigualdad.
El conjunto solución es la intersección de las dos regiones, formando el semiplano sombreado.



3) $\left.\begin{array}{l} 2x+y-8>0 \\ 3x-y+6>0 \end{array}\right\}$

Solución.

Convirtiendo a igualdad la primera inecuación: $2x+y-8=0$

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad y-8=0 \quad \Rightarrow \quad y=8$

Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-8=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=8 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{8}{2}=4$

la recta pasa por los puntos $\left(0,8\right)$ y $\left(4,0\right)$

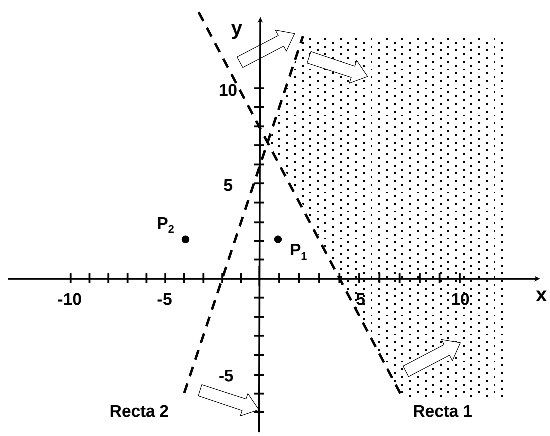
Se elige un punto que no esté en la recta para verificar si cumple o no la desigualdad. Por ejemplo, tomando al punto $P_1\left(1,2\right)$ se tiene que $2\left(1\right)+2-8=-4<0$, esto es, no cumple la inecuación, por lo que la región que no incluye a ese punto es solución de esta desigualdad.
Convirtiendo a igualdad la segunda inecuación: $3x-y+6=0$

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad -y+6=0 \quad \Rightarrow \quad -y=-6 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-6}{-1}=6$

Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+6=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=-6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-6}{3}=-2$

la recta pasa por los puntos $(0,6)$ y $(-2,0)$

Se elige un punto que no esté en la recta para verificar si cumple o no la desigualdad. Por ejemplo, tomando al punto $P_2\ (-4,2)$ se tiene que $3(-4)-2+6=-12-2+6=-8<0$, esto es, no cumple la inecuación, por lo que la región que no incluye a ese punto es solución de esta desigualdad.
El conjunto solución es la intersección de las dos regiones, formando el semiplano sombreado.



4) $\left.\begin{array}{l} 2x+5y\geq 10 \\ 5x+3y\leq 15 \end{array}\right\}$

Solución.
Acomodando:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+5y-10\geq 0 \\ 5x+3y-15\leq 0 \end{array}\right\}$$

Convirtiendo a igualdad la primera inecuación: $2x+5y-10=0$

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad 5y-10=0 \quad \Rightarrow \quad 5y=10 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{10}{5}=2$

Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-10=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=10 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{10}{2}=5$

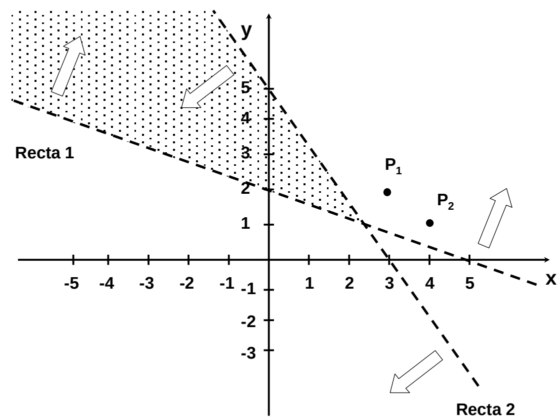
la recta pasa por los puntos $(0,2)$ y $(5,0)$

Se elige un punto que no esté en la recta para verificar si cumple o no la desigualdad. Por ejemplo, tomando al punto $P_1\ (3,2)$ se tiene que $2(3)+5(2)-10=6+10-10=6>0$, esto es, cumple la inecuación, por lo que la región que incluye a ese punto es solución de esta desigualdad.
Convirtiendo a igualdad la segunda inecuación: $5x+3y-15=0$

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad 3y-15=0 \quad \Rightarrow \quad 3y=15 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{15}{3}=5$

Si $y=0 \quad \Rightarrow \quad 5x-15=0 \quad \Rightarrow \quad 5x=15 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{15}{5}=3$

la recta pasa por los puntos $(0,5)$ y $(3,0)$
Se elige un punto que no esté en la recta para verificar si cumple o no la desigualdad. Por ejemplo, tomando al punto $P_2\ (4,1)$ se tiene que $5(4)+3(1)-15=20+3-15=8>0$, esto es, no cumple la inecuación, por lo que la región que no incluye a ese punto es solución de esta desigualdad.
El conjunto solución es la intersección de las dos regiones, formando el semiplano sombreado.



VIII.5 MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE TRES ECUACIONES Y TRES INCÓGNITAS

Un sistema de tres ecuaciones lineales con incógnitas x, y y z, también llamado *ecuaciones simultáneas de tres por tres* es de la forma:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

donde $a_{11},\cdots,a_{33}$ son coeficientes reales y b_1, b_2, b_3 son términos independientes. Resolver un sistema de este tipo es encontrar la terna de números $x,\ y$ y z que satisfacen las tres ecuaciones, si existen.

Aquí se expondrán dos métodos para resolver sistemas de ecuaciones:

- Reducción (método de eliminación de Gauss)
- Determinantes (Regla de Cramer)

VIII.5.1 MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

El método reducción para la resolución de sistemas lineales es una generalización del método de eliminación expuesto en el subtema VIII.2.2 y es aplicable a sistemas lineales de cualquier tamaño. En esencia consiste en hacer, al sistema de ecuaciones lineales, determinadas transformaciones elementales a fin de obtener un sistema escalonado (un sistema es escalonado cuando cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior), más fácil de resolver.

La idea del método es muy simple: ir reduciendo en cada paso el problema a un problema que tiene una ecuación menos y una incógnita menos. Este método es mejor conocido como método de eliminación de Gauss[1].

El procedimiento es el siguiente:

1. Tomando como base el signo de una de las incógnitas de una ecuación, se procura que en las otras dos ecuaciones esa incógnita tenga la misma magnitud y signo contrario, para que al sumarlas miembro a miembro se elimine dicha incógnita, dando lugar a que en todas las ecuaciones desaparezca, excepto en una.

2. Se procura que otra de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en cualquiera de las dos ecuaciones reducidas para que, al sumarlas miembro a miembro, se elimine dicha incógnita, dando lugar a una ecuación con sólo la tercera incógnita, misma que se despeja.

3. Con un valor conocido, se sustituye en la ecuación reducida para obtener el valor de otra incógnita a través de un despeje.

4. Con los valores de dos incógnitas se sustituye en la ecuación que no fue reducida, y mediante un despeje se obtiene el valor faltante.

Ejemplo.
Resolver los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación de Gauss.

1) $$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-5z=-13 \\ 4x+5y-2z=3 \\ -6x-2y-3z=-12 \end{array}\right\}$$

Solución.
La primera ecuación se multiplica por -2 y se suma a la segunda. La primera ecuación se multiplica por 3 y se suma a la tercera:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-5z=-13 \\ -y+8z=29 \\ 7y-18z=-51 \end{array}\right\}$$

la segunda ecuación se multiplica por 7 y se suma a la tercera:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-5z=-13 \\ -y+8z=29 \\ 38z=152 \end{array}\right\}$$

de la tercera ecuación se despeja z: $z=\frac{152}{38}=4$

se sustituye este valor en la segunda ecuación y se despeja y:

[1] El nombre es un reconocimiento al matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quien desarrolló el método.

$$-y+8(4)=29 \quad \Rightarrow \quad -y+32=29 \quad \Rightarrow \quad -y=29-32=-3 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-3}{-1}=3$$

estos valores, se sustituyen en la primera ecuación y se despeja x:

$$2x+3(3)-5(4)=-13 \quad \Rightarrow \quad 2x+9-20=-13 \quad \Rightarrow \quad 2x=-13-9+20=-2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-2}{2}=-1$$

Por lo tanto la solución del sistema es: $x=-1,\ y=3,\ z=4$

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 2(-1)+3(3)-5(4)=-2+9-20=-13 \\ 4(-1)+5(3)-2(4)=-4+15-8=3 \\ -6(-1)-2(3)-3(4)=6-6-12=-12 \end{array}\right\}$

2) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ 2x+2y-z=1 \\ -x-y+2z=1 \end{array}\right\}$

Solución.

La primera ecuación se multiplica por -2 y se suma a la segunda. La primera ecuación se multiplica por 1 y se suma a la tercera:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ -2y+z=-11 \\ y+z=7 \end{array}\right\}$$

la tercera ecuación se multiplica por 2 y se suma a la segunda:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=6 \\ 3z=3 \\ y+z=7 \end{array}\right\}$$

de la segunda ecuación se despeja z: $z=\frac{3}{3}=1$

se sustituye este valor en la tercera ecuación y se despeja y:

$$y+1=7 \quad \Rightarrow \quad y=7-1=6$$

estos valores, se sustituyen en la primera ecuación y se despeja x:

$$x+2(6)-1=6 \quad \Rightarrow \quad x+12-1=6 \quad \Rightarrow \quad x=6-12+1=-5$$

Por lo tanto la solución del sistema es: $x=-5,\ y=6,\ z=1$

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} -5+2(6)-1=-5+12-1=6 \\ 2(-5)+2(6)-1=-10+12-1=1 \\ -(-5)-(6)+2(1)=5-6+2=1 \end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y-4z=20 \\ 12x+3y+5z=9 \\ -9x-y-2z=-11 \end{array}\right\}$

Solución.

La primera ecuación se multiplica por -4 y se suma a la segunda. La primera ecuación se multiplica por 3 y se suma a la tercera:

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y-4z&=20 \\ 11y+21z&=-71 \\ -7y-14z&=49 \end{aligned}\right\}$$

la tercera ecuación se divide por 7:

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y-4z&=20 \\ 11y+21z&=-71 \\ -y-2z&=7 \end{aligned}\right\}$$

la tercera ecuación se multiplica por 11 y se suma a la segunda:

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y-4z&=20 \\ -z&=6 \\ -y-2z&=7 \end{aligned}\right\}$$

de la segunda ecuación se despeja z: $z=\frac{6}{-1}=-6$

se sustituye este valor en la tercera ecuación y se despeja y:

$$-y-2(-6)=7 \quad \Rightarrow \quad -y+12=7 \quad \Rightarrow \quad -y=7-12=-5 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-5}{-1}=5$$

estos valores, se sustituyen en la primera ecuación y se despeja x:

$$3x-2(5)-4(-6)=20 \quad \Rightarrow \quad 3x-10+24=20 \quad \Rightarrow \quad 3x=20+10-24=6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{6}{3}=2$$

Por lo tanto la solución del sistema es: $x=2,\ y=5,\ z=-6$

Comprobación: $\left.\begin{aligned} 3(2)-2(5)-4(-6)&=6-10+24=20 \\ 12(2)+3(5)+5(-6)&=24+15-30=9 \\ -9(2)-5-2(-6)&=-18-5+12=-11 \end{aligned}\right\}$

VIII.5.2 MÉTODO DE DETERMINANTES (REGLA DE CRAMER)

Dado un arreglo de números de la forma: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, su *determinante*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

denotado por Δ, es el resultado de la operación:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

Si al determinante se le agregan los dos primeros renglones y se efectúan los productos que indican las flechas se tiene que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

el determinante puede obtenerse calculando la diferencia de la suma de productos en la dirección hacia abajo menos la suma de productos en la dirección hacia arriba. Es decir, representa el producto de números que conforman su diagonal principal (la que se dirige hacia abajo) y sus dos paralelas menos el producto de números que conforman su diagonal secundaria (la que se dirige hacia arriba) y sus dos paralelas.

Ejemplos.
Aplicando la fórmula, calcular los siguientes determinantes:

1) $$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 9 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 5(-1)(7)+4(6)(-2)+8(3)(9)-8(-1)(-2)-6(9)(5)-7(4)(3)$$

$$= -35-48+216-16-270-84=-237$$

2) $$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 8 \\ -5 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 7(3)(-1)+(-5)(6)(8)+1(-2)(4)-1(3)(8)-6(4)(7)-(-1)(-5)(-2)$$

$$= -21-240-8-24-168+10=-451$$

3) $$\begin{vmatrix} 9 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & 8 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 9(-1)(2)+(-2)(5)(-3)+9(4)(8)-9(-1)(-3)-5(8)(9)-2(-2)(4)$$

$$= -18+30+288-27-360+16=-71$$

4) $$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 6 \\ 10 & 2 & \frac{7}{2} \\ 4 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2)(-8)+10(0)(6)+4\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)-4(2)(6)-0\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-(-8)(10)\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= -8+0+35-48-0+200=179$$

Dado un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

- El determinante del Sistema Δ es el determinante del arreglo formado por los coeficientes de las incógnitas.

- El determinante de cualquier incógnita es el que se obtiene sustituyendo en el arreglo del sistema la columna de los coeficientes de esa incógnita por la columna de los términos independientes.

La *Regla de Cramer* establece que dado un sistema de ecuaciones lineales cuyos términos independientes no son cero, el valor de cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la incógnita por el determinante del sistema. Esto es:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}};\qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}};\qquad z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}$$

Cuando el determinante Δ es cero, entonces el sistema es incompatible.

Ejemplo.
Obtener la solución de los siguientes sistemas aplicando la Regla de Cramer:

1) $$\left.\begin{array}{l} 3x-5y-6z=17 \\ 4x+3y+8z=-22 \\ 2x+6y-7z=42 \end{array}\right\}$$

Solución.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -5 & -6 \\ 4 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & -7\end{vmatrix}=3(3)(-7)+4(6)(-6)+2(-5)(8)-2(3)(-6)-6(8)(3)-(-7)(4)(-5)$$

$$=-63-144-80+36-144-140=-535$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 17 & -5 & -6 \\ -22 & 3 & 8 \\ 42 & 6 & -7\end{vmatrix}=17(3)(-7)+(-22)(6)(-6)+42(-5)(8)-42(3)(-6)-6(8)(17)-(-7)(-22)(-5)$$

$$=-357+792-1{,}680+756-816+770=-535$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-535}{-535}=1$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 3 & 17 & -6 \\ 4 & -22 & 8 \\ 2 & 42 & -7\end{vmatrix}=3(-22)(-7)+4(42)(-6)+2(17)(8)-2(-22)(-6)-42(8)(3)-(-7)(4)(17)$$

$$=462-1{,}008+272-264-1{,}008+476=-1{,}070$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-1{,}070}{-535}=2$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 17 \\ 4 & 3 & -22 \\ 2 & 6 & 42\end{vmatrix}=3(3)(42)+4(6)(17)+2(-5)(-22)-2(3)(17)-6(-22)(3)-(42)(4)(-5)$$

$$=378+408+220-102+396+840=2{,}140$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{2{,}140}{-535}=-4$$

Por lo tanto la solución del sistema es: $x=1,\ y=2,\ z=-4$

Comprobación: $\left.\begin{aligned} 3(1)-5(2)-6(-4)&=3-10+24=17\\ 4(1)+3(2)+8(-4)&=4+6-32=-22\\ 2(1)+6(2)-7(-4)&=2+12+28=42\end{aligned}\right\}$

2) $\left.\begin{aligned} 6x+7y+2z&=1\\ 4x+y+4z&=5\\ -5x+8y-9z&=-9\end{aligned}\right\}$

Solución.

$$\Delta=\begin{vmatrix}6&7&2\\4&1&4\\-5&8&-9\end{vmatrix}=6(1)(-9)+4(8)(2)+(-5)(7)(4)-(-5)(1)(2)-8(4)(6)-(-9)(4)(7)$$

$$=-54+64-140+10-192+252=-60$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}1&7&2\\5&1&4\\-9&8&-9\end{vmatrix}=1(1)(-9)+5(8)(2)+(-9)(7)(4)-(-9)(1)(2)-8(4)(1)-(-9)(5)(7)$$

$$=-9+80-252+18-32+315=120$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{120}{-60}=-2$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}6&1&2\\4&5&4\\-5&-9&-9\end{vmatrix}=6(5)(-9)+4(-9)(2)+(-5)(1)(4)-(-5)(5)(2)-(-9)(4)(6)-(-9)(4)(1)$$

$$=-270-72-20+50+216+36=-60$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-60}{-60}=1$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}6&7&1\\4&1&5\\-5&8&-9\end{vmatrix}=6(1)(-9)+4(8)(1)+(-5)(7)(5)-(-5)(1)(1)-8(5)(6)-(-9)(4)(7)$$

$$=-54+32-175+5-240+252=-180$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-180}{-60}=3$$

Por lo tanto la solución del sistema es: $x=-2,\ y=1,\ z=3$

Comprobación: $\left.\begin{aligned} 6(-2)+7(1)+2(3)&=-12+7+6=1\\ 4(-2)+1+4(3)&=-8+1+12=5\\ -5(-2)+8(1)-9(3)&=10+8-27=-9\end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned} -2x+3y+5z&=-23 \\ 3x+8y-2z&=68 \\ x-2y-6z&=20 \end{aligned}\right\}$

Solución.

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix}=(-2)(8)(-6)+3(-2)(5)+(1)(3)(-2)-(1)(8)(5)-(-2)(-2)(-2)-(-6)(3)(3)$$

$$=96-30-6-40+8+54=82$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} -23 & 3 & 5 \\ 68 & 8 & -2 \\ 20 & -2 & -6 \end{vmatrix}=(-23)(8)(-6)+68(-2)(5)+(20)(3)(-2)-(20)(8)(5)-(-2)(-2)(-23)-(-6)(68)(3)$$

$$=1{,}104-680-120-800+92+1{,}224=820$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{820}{82}=10$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} -2 & -23 & 5 \\ 3 & 68 & -2 \\ 1 & 20 & -6 \end{vmatrix}=(-2)(68)(-6)+3(20)(5)+(1)(-23)(-2)-(1)(68)(5)-(20)(-2)(-2)-(-6)(3)(-23)$$

$$=816+300+46-340-80-414=328$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{328}{82}=4$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -23 \\ 3 & 8 & 68 \\ 1 & -2 & 20 \end{vmatrix}=(-2)(8)(20)+3(-2)(-23)+(1)(3)(68)-(1)(8)(-23)-(-2)(68)(-2)-(20)(3)(3)$$

$$=-320+138+204+184-272-180=-246$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-246}{82}=-3$$

Por lo tanto la solución del sistema es: $x=10,\ \ y=4,\ \ z=-3$

Comprobación: $\left.\begin{aligned} -2(10)+3(4)+5(-3)&=-20+12-15=-23 \\ 3(10)+8(4)-2(-3)&=30+32+6=68 \\ 10-2(4)-6(-3)&=10-8+18=20 \end{aligned}\right\}$

VIII.6 SISTEMAS CON UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO Y UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES

La ecuación general de primer grado en dos variables es $ax+by+c=0$, donde a,b,c son coeficientes reales. Geométricamente determina una recta.

La ecuación general de segundo grado en dos variables es $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde A,B,C,D,E,F son coeficientes reales. Geométricamente, por lo general, determina una curva.

Un sistema de una ecuación de primer grado y una ecuación de segundo grado en dos variables es de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by+c=0 \\ Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \end{array}\right\}$$

Algebraicamente, el procedimiento general consiste en despejar de ambas ecuaciones la misma variable, igualar con el objeto de resolver para la otra. Una vez obtenido cada valor, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones despejadas para encontrar su pareja correspondiente.

Gráficamente, su solución está dada por la intersección de las gráficas. Se pueden tener tres casos:

- Si la recta corta a la curva, lo hace dos veces por lo que se tendrán dos puntos de intersección
- Si la recta es tangente a la curva, entonces sólo se tendrá un punto solución.
- Si la recta no corta a la curva, no tiene soluciones reales.

Ejemplos.
Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $$\left.\begin{array}{r} 4x-2y+6=0 \\ -2x^2-12x+2y+4=0 \end{array}\right\}$$

Solución:
Despejando y de la primera ecuación:

$$y=\frac{-4x-6}{-2}=2x+3$$

despejando y de la segunda ecuación:

$$y=\frac{2x^2+12x-4}{2}=x^2+6x-2$$

igualando ambas expresiones:

$$2x+3=x^2+6x-2 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x-5=0$$

resolviendo por factorización se tiene:

$$(x+5)(x-1)=0$$

$$x+5=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-5$$

$$x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=1$$

evaluando en la primera ecuación despejada:

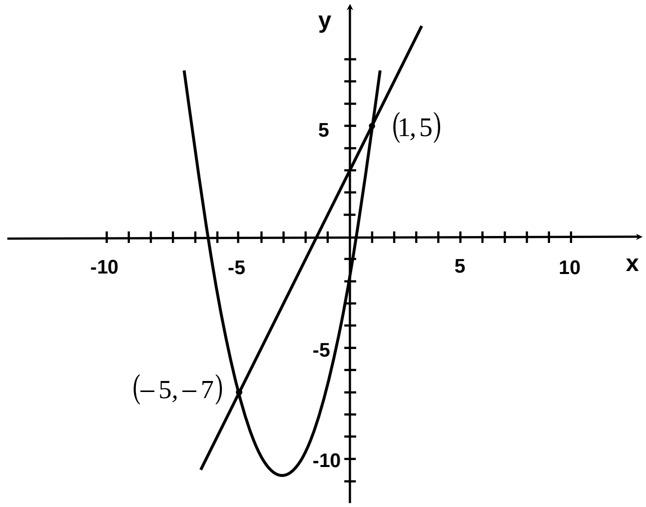
$$y_1=2(-5)+3=-10+3=-7$$

$$y_2=2(1)+3=2+3=5$$

Por lo tanto, la solución son los puntos $(-5,-7)$ y $(1,5)$

Tabulación:

x	$y=2x+3$	$y=x^2+6x-2$
-9	-15	25
-8	-13	14
-7	-11	5
-6	-9	-2
-5	-7	-7
-4	-5	-10
-3	-3	-11
-2	-1	-10
-1	1	-7
0	3	-2
1	5	5
2	7	14
3	9	25



2) $$\left.\begin{array}{r} -8x+2y-4=0 \\ 3x^2+3y^2-75=0 \end{array}\right\}$$

Solución:
Despejando y de la primera ecuación:

$$y=\frac{8x+4}{2}=4x+2$$

despejando y de la segunda ecuación:

$$y=\pm\sqrt{\frac{75-3x^2}{3}}=\pm\sqrt{25-x^2}$$

igualando ambas expresiones:

$$4x+2=\pm\sqrt{25-x^2}$$

elevando al cuadrado:

$$(4x+2)^2=\left(\pm\sqrt{25-x^2}\right)^2$$

$$16x^2+16x+4=25-x^2$$

$$17x^2+16x-21=0$$

$$a=17,\ b=16,\ c=-21$$

sustituyendo en la fórmula general de segundo grado:

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4(17)(-21)}}{2(17)}=\frac{-16\pm\sqrt{256+1{,}428}}{34}$$

$$=\frac{-16\pm\sqrt{1{,}684}}{34}=\frac{-16\pm2\sqrt{421}}{34}=\frac{-8+\sqrt{421}}{17}$$

$$x_1=\frac{-8+\sqrt{421}}{17}\approx 0.7363$$

$$x_2=\frac{-8-\sqrt{421}}{17}\approx -1.6775$$

evaluando en la primera ecuación despejada:

$$y_1 = 4\left(\frac{-8+\sqrt{421}}{17}\right)+2 \approx 4(0.7363)+2 \approx 4.9452$$

$$y_2 = 4\left(\frac{-8-\sqrt{421}}{17}\right)+2 \approx 4(-1.6775)+2 \approx -4.71$$

Por lo tanto, la solución son los puntos:

$\left(\frac{-8+\sqrt{421}}{17}, 4\left(\frac{-8+\sqrt{421}}{17}\right)+2\right)$ y

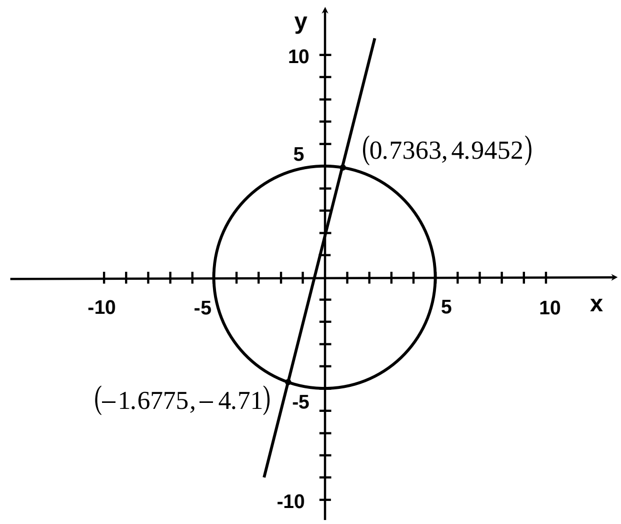
$\left(\frac{-8-\sqrt{421}}{17}, 4\left(\frac{-8-\sqrt{421}}{17}\right)+2\right)$

que aproximadamente son:

$(0.7363, 4.9452)$ y $(-1.6775, -4.71)$

Tabulación:

x	$y=4x+2$	$y=\pm\sqrt{25-x^2}$
-5	-18	0
-4	-14	±3
-3	-10	±4
-2	-6	±4.5825
-1	-2	±4.8989
0	2	±5
1	6	±4.8989
2	10	±4.5825
3	14	±4
4	18	±3
5	22	0



3) $\left.\begin{array}{l} 2x-2y-4=0 \\ x^2-y^2-4=0 \end{array}\right\}$

Solución:

Despejando y de la primera ecuación:

$$y = \frac{-2x+4}{-2} = x-2$$

despejando y de la segunda ecuación:

$$-y^2 = -x^2+4 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{-x^2+4}{-1} \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2-4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2-4}$$

igualando ambas expresiones:

$$x-2 = \pm\sqrt{x^2-4}$$

elevando al cuadrado:

$$(x-2)^2 = \left(\pm\sqrt{x^2-4}\right)^2$$

$$x^2-4x+4 = x^2-4$$

$$-4x+4 = -4$$

$$-4x = -8$$

$$x = \frac{-8}{-4} = 2$$

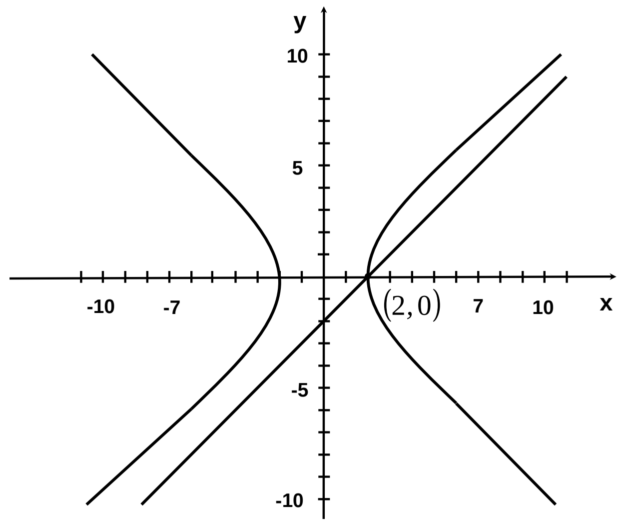
evaluando en la primera ecuación despejada:

$y = 2 - 2 = 0$

Por lo tanto, la solución es el punto $(2, 0)$.

Tabulación:

x	$y = x - 2$	$y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$
-10	-12	±9.7979
-9	-11	±8.7749
-8	-10	±7.7459
-7	-9	±6.7082
-6	-8	±5.6568
-5	-7	±4.5825
-4	-6	±3.4641
-3	-5	±2.2360
-2	-4	0
-1	-3	No definido
0	-2	No definido
1	-1	No definido
2	0	0
3	1	±2.2360
4	2	±3.4641
5	3	±4.5825
6	4	±5.6568
7	5	±6.7082
8	6	±7.7459
9	7	±8.7749
10	8	±9.7979



4) $\left.\begin{aligned} 6x + 3y + 12 = 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

Despejando y de la primera ecuación:

$$y = \frac{-6x - 12}{3} = -2x - 4$$

despejando y de la segunda ecuación:

$$y = \pm\sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}$$

igualando ambas expresiones:

$$-2x - 4 = \pm\sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}$$

elevando al cuadrado:

$$(-2x - 4)^2 = \left(\sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}\right)^2$$

$$4x^2 + 16x + 16 = \frac{36 - 4x^2}{9}$$

$$36x^2 + 144x + 144 = 36 - 4x^2$$

$$40x^2 + 144x + 108 = 0$$

$$10x^2 + 36x + 27 = 0$$

$a=10,\ b=36,\ c=27$

sustituyendo en la fórmula general de segundo grado:

$$x=\frac{-36\pm\sqrt{36^2-4(10)(27)}}{2(10)}=\frac{-36\pm\sqrt{1,296-1,080}}{20}$$

$$=\frac{-36\pm\sqrt{216}}{20}=\frac{-36\pm 6\sqrt{6}}{20}=\frac{-18\pm 3\sqrt{6}}{10}$$

$$x_1=\frac{-18+3\sqrt{6}}{10}\approx -1.0651$$

$$x_2=\frac{-18-3\sqrt{6}}{10}\approx -2.5348$$

evaluando en la primera ecuación despejada:

$$y_1=-2\left(\frac{-18+3\sqrt{6}}{10}\right)-4\approx -2(-1.0651)-4\approx -1.8698$$

$$y_2=-2\left(\frac{-18-3\sqrt{6}}{10}\right)-4\approx -2(-2.5348)-4\approx 1.0696$$

Por lo tanto, la solución son los puntos:

$$\left(\frac{-18+3\sqrt{6}}{10},-2\left(\frac{-18+3\sqrt{6}}{10}\right)-4\right) \text{ y}$$

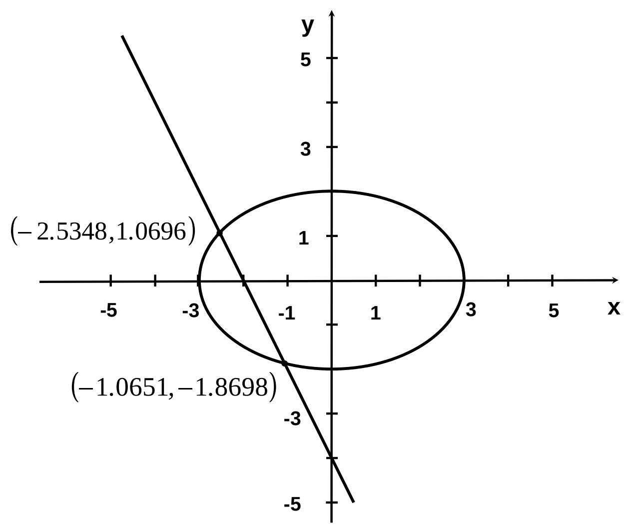
$$\left(\frac{-18-3\sqrt{6}}{10},-2\left(\frac{-18-3\sqrt{6}}{10}\right)-4\right)$$

que aproximadamente son:

$(-1.0651,-1.8698)$ y $(-2.5348,1.0696)$

Tabulación:

x	$y=-2x-4$	$y=\pm\sqrt{\frac{36-4x^2}{9}}$
-4	4	No definido
-3	2	0
-2	0	±1.4907
-1	-2	±1.8856
0	-4	2
1	-6	±1.8856
2	-8	±1.4907
3	-10	0
4	-12	No definido



5) $$\left.\begin{aligned}10x-5y-25=0\\ 12y^2+48x-156=0\end{aligned}\right\}$$

Solución:

Despejando y de la primera ecuación:

$$y=\frac{-10x+25}{-5}=2x-5$$

despejando y de la segunda ecuación:

$$y = \pm\sqrt{\frac{156-48x}{12}} = \pm\sqrt{13-4x}$$

igualando ambas expresiones:

$$2x-5 = \pm\sqrt{13-4x}$$

elevando al cuadrado:

$$(2x-5)^2 = \left(\pm\sqrt{13-4x}\right)^2$$

$$4x^2 - 20x + 25 = 13 - 4x$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$

dividiendo por 4:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

factorizando se tiene:

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$$

$$x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

evaluando en la primera ecuación despejada:

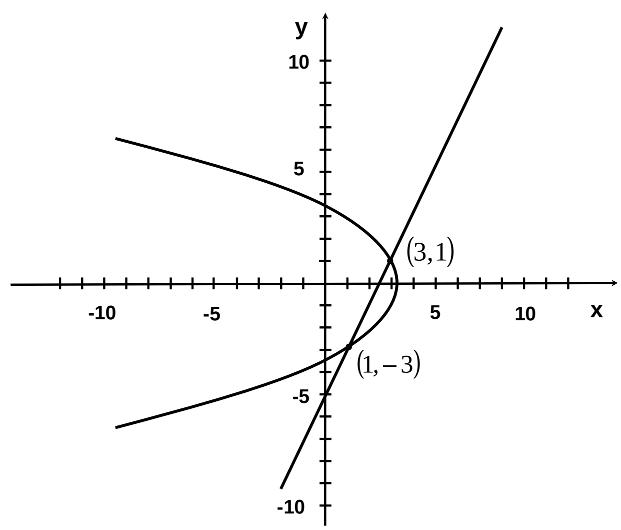
$$y_1 = 2(3)-5 = 6-5 = 1$$

$$y_2 = 2(1)-5 = 2-5 = -3$$

Por lo tanto, la solución son los puntos $(3,1)$ y $(1,-3)$

Tabulación:

x	$y=2x-5$	$y=\pm\sqrt{13-4x}$
-10	-25	±7.2801
-9	-23	±7
-8	-21	±6.7082
-7	-19	±6.4031
-6	-17	±6.0827
-5	-15	±5.7445
-4	-13	±5.3851
-3	-11	±5
-2	-9	±4.5825
-1	-7	±4.1231
0	-5	±3.6055
1	-3	±3
2	-1	±2.230
3	1	±1
4	3	No definido
5	5	No definido
6	7	No definido
7	9	No definido
8	11	No definido
9	13	No definido
10	15	No definido



6) $\left.\begin{aligned} -x+2y-10&=0 \\ x^2+y^2-9&=0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

Despejando y de la primera ecuación:

$$y = \frac{x+10}{2}$$

despejando y de la segunda ecuación:

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

igualando ambas expresiones:

$$\frac{x+10}{2} = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

elevando al cuadrado:

$$\left(\frac{x+10}{2}\right)^2 = \left(\pm\sqrt{9 - x^2}\right)^2$$

$$\frac{x^2 + 20x + 100}{4} = 9 - x^2$$

$$x^2 + 20x + 100 = 36 - 4x^2$$

$$5x^2 + 20x + 64 = 0$$

resolviendo por fórmula general:

$$a = 5,\ b = 20,\ c = 64$$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(5)(64)}}{2(5)} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 1{,}280}}{10} = \frac{-20 \pm \sqrt{-880}}{10}$$

Como el discriminante es negativo, no hay solución en los números reales.

Tabulación:

x	$y = \frac{x+10}{2}$	$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$
-10	0	No definido
-9	0.5	No definido
-8	1	No definido
-7	1.5	No definido
-6	2	No definido
-5	2.5	No definido
-4	3	No definido
-3	3.5	0
-2	4	±2.2360
-1	4.5	±2.8284
0	5	±3
1	5.5	±2.8284
2	6	±2.2360
3	6.5	0
4	7	No definido
5	7.5	No definido
6	8	No definido
7	8.5	No definido
8	9	No definido
9	9.5	No definido
10	10	No definido