APLICACIONES DE LA DERIVADA

UNIDAD IV

EJERCICIOS ABIERTOS

- Hallar la ecuación de la rectas tangente y de la recta normal de las siguientes funciones en los puntos dados:

1) $f(x)=4x^2-5x-8$ $\quad P(2,-2)$
2) $f(x)=3x^3-6x^2+4x-7$ $\quad P(3,32)$
3) $f(x)=\sqrt{16x^4}$ $\quad P(1,4)$
4) $x^2y^3-5x-7y^2-9x^5y^4+28=0$ $\quad P(0,2)$

- Determinar el ángulo que forman los siguientes pares de curvas:

5) $f(x)=2x^2$ y $g(x)=4x-6$
6) $x^2-2x+y^2=0$ y $x^2+y^2=10$
7) $y^2=4x$ y $2x^2=y$
8) $f(x)=2x^3-5$ y $g(x)=7x^2-5$

- Obtener los puntos críticos, los máximos y mínimos de las siguientes funciones. Además, determinar los intervalos en que es creciente, dónde es decreciente, identificar sus puntos de inflexión y expresar en dónde es cóncava y en dónde convexa. De acuerdo a lo anterior, trazar la gráfica correspondiente.

9) $f(x)=9+6x-3x^2$ en el intervalo $-2\le x\le 4$
10) $f(x)=2x^3+4x^2-8x-16$ en el intervalo $-4\le x\le 3$
11) $f(x)=x^4-9x^2+5$ en el intervalo $-3\le x\le 3$
12) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3-3x^2+8x-1$ en el intervalo $-3.5\le x\le 5.5$

13) Exponer en qué consiste el teorema de Rolle.
14) Explicar con detalle el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial.
15) Un proyectil de $3\,kg$ sigue una trayectoria de acuerdo a la función $f(t)=2t^3-4t^2+5t-7$. Encontrar la distancia, velocidad y aceleración en $t=3.5\ s$.
16) La trayectoria del refresco en un popote espiral de $40\ cm$ de largo y $8\ mm$ de diámetro está dada por la función: $x(t)=t^3-8t^2+9t+4$. ¿Con qué presión, en Pascales, llega el refresco a la boca después de haber tomado un trago de 25 gramos en 3 segundos?
17) Obtener el calor específico de un material de $4\,kg$ cuya función viene dada por $Q(T)=\dfrac{3}{2T^2}\,[J]$ para $T=305\,°K$.
18) Si la cantidad de carga eléctrica que pasa por un conductor se expresa con: $q(t)=\ln\left(5t^3-8t^2\right)^4\ [Coulombs]$, hallar la corriente que circula para $t=8\ s$.

19) Determinar la iluminación producida por una fuente en una superficie de $5\,m^2$, si el flujo luminoso se comporta de acuerdo a $L(A) = -\frac{4000}{A}\,[lúmenes]$.

20) Una molécula de un producto C se forma de una molécula del reactivo A y una molécula del reactivo B. Si la concentración de la nueva molécula es $[C] = \frac{a^2kt}{akt+1}$ (donde k es una constante y las concentraciones iniciales de A y B tienen el valor $[A] = [B] = a\,\frac{moles}{litro}$), encontrar la velocidad instantánea de reacción para $t = 2\ s$.

21) Una colonia de conejos crece a razón de $C(t) = 0.25t^4 + 2.6t^2 - 1.5t + 12.06$ (t en meses). Hallar: a) el número aproximado de conejos a los 15 días; b) obtener la rapidez de crecimiento para $t = 3\ meses$.

22) Un aprendiz toma un curso intensivo para poder fabricar artesanías. Si $R(t) = e^{0.1x}\,[artículos]$ representa su función de rendimiento para dominar la técnica, determinar la razón de mejora de su aprendizaje para $t = 30\ días$.

23) La función de costo para producir x juguetes es: $C(x) = 2000 + 3x + 0.01x^2 + 0.0002x^3$. Obtener el costo marginal para $x = 100$ juguetes y compararlo con el costo de fabricación del $101-ésimo$ juguete.

24) Una bola de nieve se funde de modo que su área superficial disminuye a razón de $1\,\frac{cm^2}{\min}$, encontrar la razón a la cual disminuye el diámetro cuando éste mide $10\ cm$.

25) Se bombea agua a un pozo cilíndrico vertical de 2 metros de radio a razón de $7\,\frac{m^3}{\min}$. Hallar la variación de la altura del nivel del agua respecto al tiempo.

26) La altura de un triángulo crece $1\,\frac{cm}{\min}$ y su área $2\,\frac{cm^2}{\min}$, ¿con qué razón cambia la base del triángulo cuando la altura es de $10\ cm$ y el área de $100\ cm^2$?

27) Se descarga cemento de una tolva a razón de $1.8\,\frac{m^3}{\min}$ de forma tal que se forma una pila cónica cuyo diámetro en la base es siempre igual a la altura. ¿Con qué rapidez aumenta la altura de la pila cuando ésta tiene $1.5\ m$ metros de alto?

28) Dos automóviles empiezan a moverse de un mismo punto. Uno viaja hacia el sur a $120\,\frac{km}{hr}$ y otro hacia el oeste a $50\,\frac{km}{hr}$. ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los automóviles dos horas más tarde?

29) Obtener dos números cuya suma sea 120 y cuyo producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

30) Hallar dos números positivos cuyo producto sea 25 y su suma sea mínima.

31) Si se cuenta con $1200\ cm^2$ de cartón para hacer una caja de base cuadrada y la parte superior abierta, encontrar el volumen máximo posible de la caja.

32) Se ha solicitado a un carpintero que construya una caja abierta con base cuadrada. Los lados de la caja costarán $3.00 por metro cuadrado y la base costará $4.00 por metro cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de volumen máximo que puede construirse por $48.00?

33) Determinar el punto de la recta $y = 2x - 3$ más cercano al origen.

- Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hopital:

34) $\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x^2 - 16}$

35) $\lim_{x\to\infty} \frac{10x^2 - 7x - 3}{x^2 + 5}$

36) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos 2x - 1}$

37) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

38) $\lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{1 - e^x}$

39) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x + 2\ln x}{x + 3\ln x}$

40) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\operatorname{sen} x}$

41) $\lim_{x\to 0} x^2 e^x$

42) $\lim_{x\to 0} x \csc x$

43) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

44) Definir formalmente el concepto de diferencial. ¿Es igual Δx a dx? ¿Es igual Δy a dy? Hacer una gráfica en la que se exponga lo anterior.

45) Exponer las cuatro propiedades de la diferencial.

46) Explicar por qué la derivada es un cociente de diferenciales.

- Diferenciar las siguientes funciones:

47) $f(x) = (2x^2 + 4x - 6)^5$

48) $f(x) = (5x^3 - 6x - 4)(4x^3 - 9x^2 - 5x - 7)$

49) $f(x) = \sqrt[5]{6x^3}$

50) $y = \frac{4x - 6x^2}{5x^4 - 7x^2 - 9}$

51) $3x^2 y - 4x^3 y^2 + 6y^2 - 5x - 11 = 0$

52) $f(x) = -7 \operatorname{sen} 4x^3$

53) $f(x) = 3\csc^{-1} 5x^2$

54) $f(x) = 6\ln 4x^3$

55) $f(x) = 5e^{2x^2}$

56) $f(x) = 9\log_6 (3 - 11x^3)$

57) $y = 2\cos^5 3x^2$

58) $f(x) = 7^{5x^6}$

59) Calcular d^3y de $y = -\dfrac{5}{x^2}$

60) Calcular d^5y de $y = -3\cos 4x$

- Para las siguientes funciones, calcular $\Delta x, dx, \Delta y, dy$ y el $\% e$ dados los puntos x_1 y x_2 :

61) $f(x) = 4x^2 + 5x - 6$ $\quad x_1 = 3, \quad x_2 = 3.15$

62) $f(x) = 2x^3 + 5x^3 - 3x + 1$ $\quad x_1 = 4, \quad x_2 = 4.002$

63) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad x_1 = 2, \quad x_2 = 2.3$

- Usando diferenciales, calcular de forma aproximada lo siguiente:

64) $\sqrt{50}$

65) $\sqrt[3]{123}$

66) $\sqrt[4]{258}$

67) 4.06^3

68) 4.025^5

69) 9.1^2

70) $\log_{10} 1{,}005$

71) $\ln 2.8$

72) $\cos 61^{\text{o}}$

73) $\tan 49^{\text{o}}$

74) $\text{sen } 33^{\text{o}}$

75) Un móvil se mueve según la función $s = 6t^2 - 4t - 12$, donde s representa la distancia recorrida medida en metros y t el tiempo medido en segundos. Determinar el desplazamiento que experimenta el móvil en el tiempo comprendido entre 9 segundos y $\left(9 + \dfrac{1}{4}\right)$ segundos.