FUNCIONES

UNIDAD I

Las magnitudes que caracterizan un fenómeno dado pueden quedar completamente determinadas por los valores de otras. Estas interdependencias fueron las que dieron origen al concepto de función porque gran parte de los fenómenos que se observan en la naturaleza se pueden relacionar unos con otros a través de correspondencias.

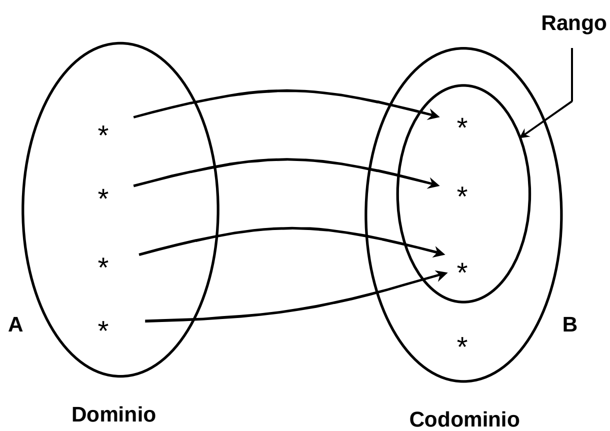
I.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE FUNCIONES

Una función se refiere a una asignación o correspondencia de un conjunto a otro. Su definición formal es la siguiente:

Una *función* es una terna constituida por:

1. Un conjunto A llamado *dominio* de la función
2. Un conjunto B llamado *codominio* de la función
3. Una *regla de correspondencia* que posee tres características
   a) A todo elemento del dominio se le puede asociar un elemento del codominio
   b) Ningún elemento del dominio puede quedarse sin un asociado en el codominio
   c) Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el codominio.

Se denota como: $f : A \rightarrow B$



El dominio, denotado por D_f, de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, es decir, son todos aquellos números para los cuales la función tiene sentido (también se conoce como campo de variación).

Al elemento que se obtiene en el codominio después de aplicar la regla de correspondencia a un elemento del dominio recibe el nombre de *imagen*. Al conjunto de todas las imágenes se le conoce como *rango*[1], *denotado por* R_f.

[1] Al rango también se le conoce como *recorrido*.

Ejemplo.
Sea un conjunto de siete muchachos y otro conjunto sus edades respectivas en años:

NOMBRE	EDAD
Alberto	17
Clarissa	16
Diana	19
Ernesto	17
Fabiola	16
Karen	19
Manuel	15

La tabla muestra que a cada muchacho le corresponde una edad y cumple con las condiciones de función, por lo que su dominio es: { Alberto, Clarissa, Diana, Ernesto, Fabiola, Karen, Manuel } y el rango es { 15,16,17,19 }.

Si se denota a x como un elemento en el dominio de la función, entonces el elemento en el recorrido que f asocia con x, es la imagen de x bajo la función f. Esto es: f (Manuel) = 15, f (Clarissa) = f (Fabiola) = 16, f (Alberto) = f (Ernesto) = 17 y f (Diana) = f (Karen) = 19.

En términos de variables, una función también se puede definir de la siguiente forma:

Se dice que una variable y es función de otra x, cuando ambas están relacionadas de forma que para cada valor de x perteneciente a su campo de variación, le corresponde sólo uno de y. La variable y recibe el nombre de *variable dependiente*, mientras que x es la *variable independiente*.

Lo anterior puede expresarse simbólicamente de la siguiente forma: $y = f(x)$

Esta manera de representar una función es especialmente útil, pues se puede saber con certeza el valor que toma la variable dependiente para cualquier valor que tome la variable independiente. Esto posibilita la construcción de una tabla de valores de la misma y su respectiva gráfica, debido a que cada pareja de valores (x, y) de la tabla que se calcule representa un punto del plano cartesiano.

Por tanto, una función puede ser presentada de múltiples maneras: una expresión matemática del tipo $y = f(x)$, una tabla de valores, una gráfica o incluso una frase que exprese la relación entre ambas variables[2].

Para encontrar el dominio y el rango de una función es necesario efectuar una inspección particular que analice su comportamiento, para lo cual se recomienda: para el dominio, que esté despejada la variable dependiente y para el rango que lo esté la variable independiente. A partir de esas expresiones, se efectúa un análisis que consiste básicamente en determinar los valores reales de la variable no despejada que hacen reales los valores de la variable despejada, obteniendo así el dominio y el rango respectivamente.

Ejemplos.
Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones:
1) $f(x) = x^2 + 5$
Solución:
La función está definida para todo valor de x, es decir, su dominio son todos los números reales:
$D_f = (-\infty, \infty)$

[2] No todas las funciones son de una sola variable independiente. En realidad, el concepto de función es más general. La definición más completa de función es la siguiente: Una función es una ley que relaciona una o más variables independientes con otra variable dependiente de forma unívoca, es decir, que a cada conjunto de valores formado por un valor de cada una de las variables independientes le corresponde sólo un valor de la variable dependiente. Una función de varias variables tendría este aspecto: $y = f(x_1, x_2, x_3.\cdots, x_n)$. A lo largo de este libro, sólo se analizarán funciones de una variable.

Despejando x para obtener el rango:

$y = x^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad y - 5 = x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y-5} = x$

Resolviendo la desigualdad: $y - 5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq 5$

$\therefore \quad R_f = [0, \infty)$

2) $f(x) = |x|$

Solución:

La función está definida para todo valor de x, es decir, su dominio son todos los números reales:

$D_f = (-\infty, \infty)$

Por definición de valor absoluto, el valor más pequeño que puede tener y es cero:

$\therefore \quad R_f = [0, \infty)$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

Solución:

La función está definida para todo valor de x, exceptuando $x = -3$ y $x = 3$, ya que la división por cero no existe:

$D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

Despejando x para obtener el rango:

$$y = \frac{1}{x^2 - 9} \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 9)y = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{y} + 9 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{y} + 9}$$

Resolviendo la desigualdad: $\dfrac{1}{y} + 9 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{y} \geq -9$

Si $y > 0$: $y \geq -\dfrac{1}{9}$, entonces su intersección es: $y > 0$.

Si $y < 0$: $y \leq -\dfrac{1}{9}$, entonces su intersección es: $y \leq -\dfrac{1}{9}$.

$\therefore \quad R_f = \left(-\infty, -\dfrac{1}{9}\right] \cup [0, \infty)$

4) $f(x) = \sqrt{5x - 20}$

Solución:

El radicando no puede ser negativo, así que: $5x - 20 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 5x \geq 20 \quad \Rightarrow \quad x \geq \dfrac{20}{5} \quad \Rightarrow \quad x \geq 4$

$D_f = [4, \infty)$

Para obtener el rango, se observa que el valor mínimo que se puede obtener de una raíz cuadrada es cero, así que: $y \geq 0$.

$\therefore \quad R_f = [0, \infty)$

5) $f(x) = 2 sen\, x$

Solución:

La función seno está definida para todo valor de x, es decir, su dominio son todos los números reales:

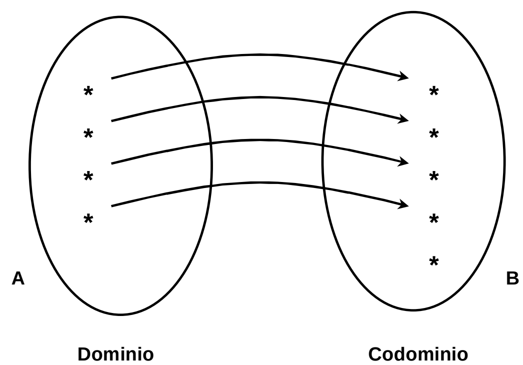
$D_f = (-\infty, \infty)$

El rango de la función seno está definida está definida para $-1 \leq x \leq 1$, pero como tiene una amplitud de dos, este rango se duplica:

$\therefore \quad R_f = [-2, 2]$

I.2 FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

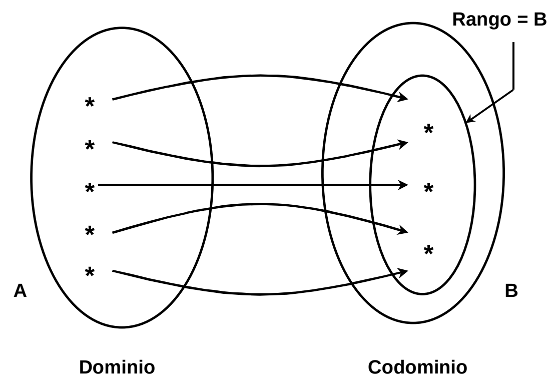
- Una función es *inyectiva* cuando a diferentes elementos del dominio le corresponden distintos elementos del codominio, y recíprocamente, a distintos elementos del codominio se le asocian diferentes elementos del dominio. También se le conoce como función *uno a uno*.



Ejemplo.

La función $y = 2^x$ tiene como dominio al conjunto de los números reales y su rango son los números reales positivos (por tanto, excluye a todos los reales negativos y al cero).

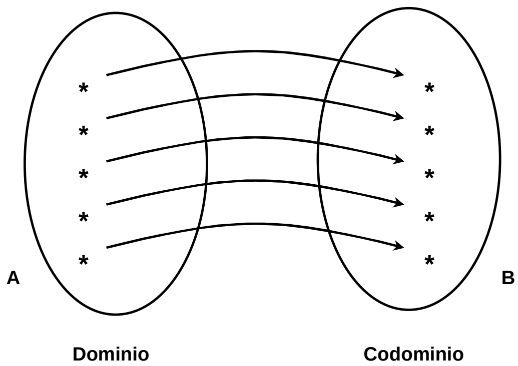
- Una función es *suprayectiva* si cualquier elemento del codominio es imagen de por lo menos un elemento del dominio de la función. También se le conoce como *sobreyectiva*.



Ejemplo.

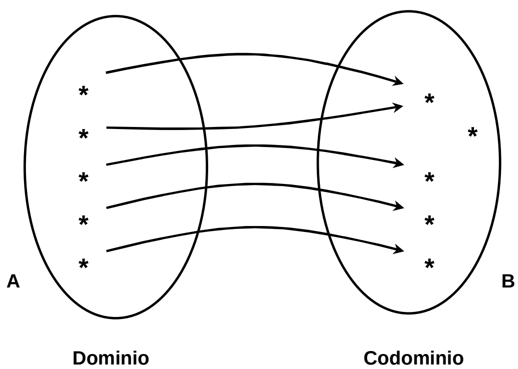
La función $y = x^3 - 3x$ tiene como dominio al conjunto de los números reales y su rango también son los números reales. Pero la función presenta un crecimiento hasta llegar a $y = 2$, después un decrecimiento hasta $y = -2$ y vuelve a crecer. Por lo tanto, existe un intervalo cuyos valores del dominio tienen la misma imagen, por lo tanto no es una función uno a uno.

- Una función es *biyectiva* si cumple con ser inyectiva y suprayectiva. La regla de correspondencia es *biunívoca*.



Ejemplo.
La función $y = 6x - 2$ tiene como dominio y rango al conjunto de los números reales. Cumple con ser inyectiva y suprayectiva.

Pueden existir funciones que no sean ni inyectivas ni suprayectivas, es decir, en donde la asociación no sea uno a uno y además que no cumplan que el rango y el codominio sean iguales, como por ejemplo:



En general, se pueden efectuar innumerables correspondencias entre dos conjuntos, sin embargo, sólo serán funciones aquellas que cumplan con las condiciones definidas. Las que no las cumplan sólo serán relaciones.

I.3 TIPOS DE FUNCIONES

Función constante

Es una función en que siempre toma el valor k, que es una constante:

$$f(x) = k$$

Su dominio son todos los números reales.

Función identidad

Es una función donde la variable dependiente toma el mismo valor que tiene la variable independiente:

$$f(x) = x$$

Su dominio son todos los números reales.

Funciones algebraicas

Son las funciones que se obtienen cuando se efectúan un número finito de sumas, restas y productos con las funciones constante e identidad. Su dominio son todos los números reales.

Funciones polinómicas

Son funciones de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

donde $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números reales y los exponentes son números naturales.
El dominio de todas las funciones polinómicas son todos los números reales.

Funciones lineales

Son funciones polinómicas de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

La representación gráfica de una función lineal es una recta donde m representa la pendiente (grado de inclinación) y b representa la ordenada al origen (cruce de la recta en el eje y). Por ser también una función polinómica, su dominio son todos los números reales.

Funciones cuadráticas

Son funciones polinómicas de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes y a es diferente de cero. La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$ o que se abre hacia abajo si $a < 0$. Al ser función polinómica, su dominio son todos los números reales.

Funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas. Esto es, q es una función racional si para todo x en el dominio, dados los polinomios $f(x)$ y $g(x)$, se tiene:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de una función racional consiste de todos los números reales excepto los ceros (o raíces) del polinomio en el denominador, ya que la división por cero no está definida.

Funciones de proporcionalidad inversa

Este tipo de funciones relaciona las variables x y y a través de expresiones del tipo:

$$y = \frac{k}{x}$$

siendo k un número real cualquiera distinto de cero. La gráfica de este tipo de funciones es una curva denominada hipérbola equilátera. El dominio de este tipo de funciones son todos los números reales exceptuando el cero.

Funciones irracionales

Son aquellas funciones algebraicas y/o racionales en que interviene la operación de radicación. A fin de que este tipo de funciones existan, el dominio depende de la naturaleza de las raíces y, en su caso, de los ceros del denominador.

Funciones trascendentes

Son aquellas funciones que no son algebraicas. Incluyen las funciones trigonométricas directas, las trigonométricas inversas, las exponenciales y las logarítmicas.

Funciones periódicas

Una función es periódica si cumple que:

$$f(x) = f(x+p)$$

donde p es un número real diferente de cero, llamado periodo.

Funciones par e impar

Una función par es aquella que cumple con:

$$f(x) = f(-x)$$

Una función impar es aquella que cumple con:

$$f(-x) = -f(x)$$

I.4 ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Sean f y g dos funciones de x con dominios D_f y D_g respectivos.

- La *suma de funciones* se define como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$.

Ejemplo.

$f(x) = x^2$; $g(x) = -2x+5$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 2x + 5$

$D_f = (-\infty, \infty)$

$D_g = (-\infty, \infty)$

$$D_{f(x)+g(x)} = D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$$

- La *resta de funciones* se define como $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$.

Ejemplo.

$f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9-x^2}$

$D_f = [0, \infty)$

$D_g = [-3, 3]$

$D_{f(x)-g(x)} = D_f \cap D_g = [0, 3]$

- El *producto de funciones* se define como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$.

Ejemplo.

$f(x) = 3x$; $g(x) = \dfrac{1}{12-2x}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{3x}{12-2x}$

$D_f = (-\infty, \infty)$

$D_g = (-\infty, 6) \cup (6, \infty)$

$D_{f(x) \cdot g(x)} = D_f \cap D_g = (-\infty, 6) \cup (6, \infty)$

- El *cociente de funciones* se define como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y su dominio es $D_f \cap D_g$, siempre que $g(x) \neq 0$.

Ejemplo.

$f(x) = \dfrac{11}{2-x}$; $g(x) = 9x$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{11}{(2-x)}}{9x} = \frac{11}{18x - 9x^2}$$

$D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

$D_g = (-\infty, \infty)$

$D_{\frac{f(x)}{g(x)}} = D_f \cap D_g = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

- La *composición de funciones* se define como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y su dominio es el conjunto de todos los valores de x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f. Esto significa que: $D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$

Ejemplos.

Dadas las siguientes funciones, obtener la composición $f \circ g$ y determinar su dominio.

1) $f(x) = \sqrt{x-8}$; $g(x) = x - 2$

Solución.
$D_f = [8, \infty)$
$D_g = (-\infty, \infty)$
Para obtener la composición $f \circ g$ se sustituye x por $g(x)$ en f:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \sqrt{(x-2)-8} = \sqrt{x-10}$
en esta función el dominio es: $D_f = [10, \infty)$
$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$
$D_{f \circ g} = \{(-\infty, \infty) \cap [10, \infty)\} = [10, \infty)$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x-25}$; $g(x) = x^2$
Solución.
$D_f = (-\infty, 25) \cup (25, \infty)$
$D_g = (-\infty, \infty)$
Para obtener la composición $f \circ g$ se sustituye x por $g(x)$ en f:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \dfrac{1}{(x^2)-25} = \dfrac{1}{x^2-25}$
en esta función el dominio es: $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)$
$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$
$D_{f \circ g} = \{(-\infty, \infty) \cap (-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)\} = (-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)$

Es importante señalar que $f \circ g \neq g \circ f$. En el primer caso, primero se aplica la función g y después f. En el segundo caso, primero se aplica la función f y después g.

Ejemplo.
Dadas $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \sqrt{4+x}$, obtener $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución.
a) $D_f = (-\infty, 1]$
$D_g = [-4, \infty)$
Para obtener la composición $f \circ g$ se sustituye x por $g(x)$ en f:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{4+x}\right) = \sqrt{1-\sqrt{4+x}}$
en esta función el dominio es: $[-4, -3]$
$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$
$D_{f \circ g} = \{[-4, \infty) \cap [-4, -3]\} = [-4, -3]$

b) $D_f = (-\infty, 1]$
$D_g = [-4, \infty)$
Para obtener la composición $g \circ f$ se sustituye x por $f(x)$ en g:
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f\left(\sqrt{1-x}\right) = \sqrt{4+\sqrt{1-x}}$

en esta función el dominio es: $(-\infty, 1]$

$D_{g\circ f} = \{\, x \in D_f \mid f(x) \in D_g \,\}$

$D_{g\circ f} = \{(-\infty, 1] \cap (-\infty, 1]\} = (-\infty, 1]$

$\therefore \quad f \circ g \neq g \circ f$

Ejemplos.

Obtener $f \circ g$, $D_{f\circ g}$, $g \circ f$, y $D_{g\circ f}$ si:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

Solución.

$D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$D_g = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\dfrac{x-1}{x+1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{x-1-x-1}{x+1}} = \frac{x+1}{-2}$$

en esta función el dominio es: $(-\infty, \infty)$

pero como $D_{f\circ g} = \{\, x \in D_g \mid g(x) \in D_f \,\}$, entonces:

$D_{f\circ g} = \{\, (-\infty, \infty) \cap [(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)] \,\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

$$(g \circ f)(x) = \frac{\dfrac{1}{x-1} - 1}{\dfrac{1}{x-1} + 1} = \frac{\dfrac{1-x+1}{x-1}}{\dfrac{1+x-1}{x-1}} = \frac{2-x}{x}$$

en esta función el dominio es: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

pero como $D_{g\circ f} = \{\, x \in D_f \mid f(x) \in D_g \,\}$, entonces:

$D_{g\circ f} = \{\, [(-\infty, 0) \cup (0, \infty)] \cap [(-\infty, 1) \cup (1, \infty)] \,\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$

Solución.

$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

$D_g = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{x-3} + 2} = \frac{1}{\dfrac{1+2x-6}{x-3}} = \frac{x-3}{2x-5}$$

para esta expresión el dominio es: $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2}, \infty\right)$

pero como $D_{f\circ g} = \{\, x \in D_g \mid g(x) \in D_f \,\}$, entonces:

$$D_{f\circ g} = \left\{\, [(-\infty, 3) \cup (3, \infty)] \cap \left[\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)\right] \right\} = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup (3, \infty)$$

$$(g\circ f)(x)=\frac{1}{\frac{1}{x+2}-3}=\frac{1}{\frac{1-3x-6}{x+2}}=\frac{x+2}{-3x-5}$$

para esta expresión el dominio es: $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup\left(-\frac{5}{3},\infty\right)$

pero como $D_{g\circ f}=\left\{\, x\in D_f \;\middle|\; f(x)\in D_g \,\right\}$, entonces:

$$D_{g\circ f}=\left\{\,[(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)]\cap\left[\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup\left(-\frac{5}{3},\infty\right)\right]\right\}=(-\infty,-2)\cup\left(-2,-\frac{5}{3}\right)\cup\left(-\frac{5}{3},\infty\right)$$

I.5 MODELADO DE FUNCIONES

Un modelo matemático se define como una descripción desde el punto de vista de las Matemáticas de un hecho o fenómeno del mundo real, cuyo objetivo es entenderlo ampliamente.

La mayoría de las funciones describen comportamientos de fenómenos o características de problemas que involucran a múltiples variables. Sin embargo, muchas veces existen formas de expresar todas las variables en términos de una sola a fin de simplificar su análisis.

El proceso de modelado de funciones es el siguiente:

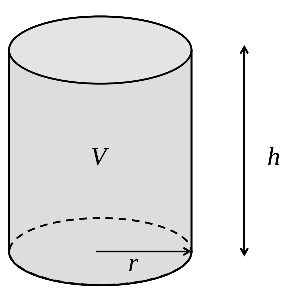
1. Leer claramente el problema e identificar la función buscada.
2. Hacer un dibujo que muestre las características por modelar
3. Anotar los datos del problema y establecer las fórmulas que son conocidas.
4. Expresar todas las variables en términos de la variable pedida a través de un manejo algebraico.
5. Expresar el comportamiento de la función en términos de la variable pedida.

Es importante mencionar que un modelo matemático no es completamente exacto con problemas de la vida real, de hecho, se trata de una idealización.

Hay una gran cantidad de funciones que representan relaciones observadas en el mundo real. Los siguientes ejemplos muestran algunos casos típicos de modelaciones a través de funciones.

Ejemplos.
1) Expresar el volumen V de un cilindro como función del radio r si su altura es del doble de su radio.

Solución.
Dibujando el cilindro:



El volumen de un cilindro es: $V=\pi r^2 h \quad \_(1)$

La altura es el doble del radio, así que: $h^2=2r \quad \_(2)$

Sustituyendo en (1) se obtiene la expresión pedida: $V(r)=\pi r^2(2r)=2\pi r^3$

2) Expresar el área A de un rectángulo como función de la base b, si se sabe que su perímetro es de $100\ cm$.

Solución.

El perímetro de un rectángulo está dado por: $P = 2a + 2b \quad \_(1)$

Sustituyendo $P = 100$ en (1):

$2a + 2b = 100$

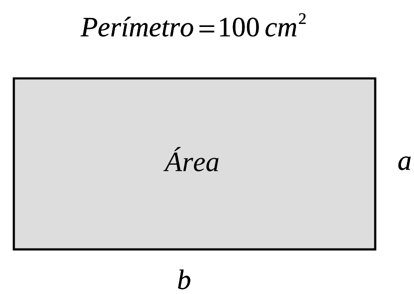
Como se quiere expresar en términos de b,
se despeja la altura a:

$$2a + 2b = 100 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{100 - 2b}{2} = 50 - b \quad \_(2)$$

El área de un rectángulo es: $A = ab \quad \_(3)$

Sustituyendo (2) en (3) se tiene: $A = (50 - b)b$

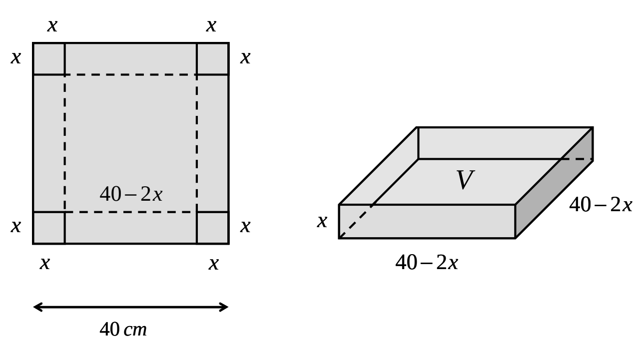
Por lo que la expresión buscada es: $A(b) = 50 - b^2$



3) Se dispone de una cartulina cuadrada $40\ cm$ de lado y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados. Expresar el volumen de la caja en función del lado del cuadrado recortado x.

Solución.

Haciendo una figura, se tiene:



La longitud de cada lado de la caja es: $40 - 2x$

El volumen de la caja es: $V = A \cdot x$

$A = (40 - 2x)^2 x = (1600 - 160x + 4x^2)x$

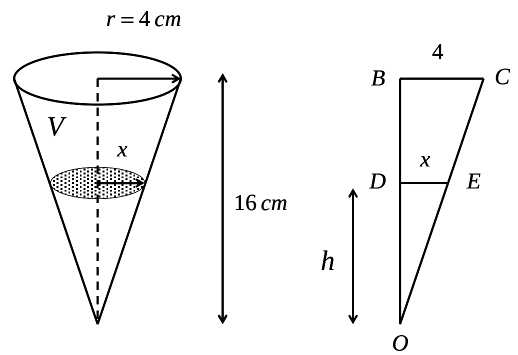
Por lo que la expresión buscada es: $A(x) = 4x^3 - 160x^2 - 1600x$

4) Expresar el volumen V de agua como función de la altura h en un instante cualquiera de un cono circular recto invertido de $4\ cm$ de radio y de $16\ cm$ de altura.

Solución.

Haciendo una figura, se tiene:

El volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \_(1)$



Por la semejanza de los triángulos ODE y OBC se tiene: $\frac{16}{4} = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = 4x \quad \_(2)$

Despejando x de (2): $x = \frac{h}{4}$

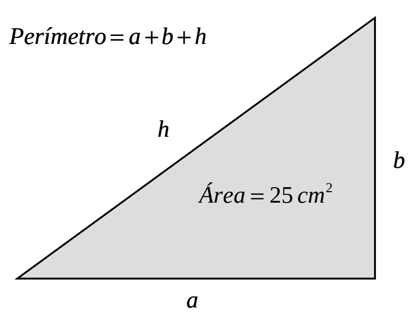
El volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 h \quad \_(3)$

Sustituyendo r por el valor de x en (1) se obtiene: $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{h^2}{16}h$

Por lo que la expresión pedida es: $V(h) = \frac{1}{48}\pi h^3$

5) Expresar la hipotenusa h de un triángulo con área de $25\,cm^2$ como función de su perímetro P.

Solución.
Dibujando el triángulo rectángulo:



El Teorema de Pitágoras establece que: $h^2 = a^2 + b^2 \quad \_(1)$

El área de un triángulo está dada por: $A = \frac{ab}{2} \quad \_(2)$

El perímetro P del triángulo está dado por: $P = a + b + h \quad \_(3)$

Se sabe que: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \Rightarrow \quad (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$

Comparando con (1) se tiene: $h^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad \_(4)$

De (2): $\frac{ab}{2}=25 \quad \Rightarrow \quad ab=50 \quad \Rightarrow \quad 2ab=100$

Sustituyendo en (4): $h^2 = (a+b)^2 - 100 \quad \_(5)$

De (3): $P-h=a+b \quad \Rightarrow \quad (P-h)^2 = (a+b)^2 \quad -(6)$

Sustituyendo en (5): $h^2 = (P-h)^2 - 100$

$\Rightarrow \quad h^2 = P^2 - 2Ph + h^2 - 100 \quad \Rightarrow \quad 0 = P^2 - 2Ph - 100$

$\Rightarrow \quad 2Ph = P^2 - 100$

despejando h se obtiene la expresión pedida: $h(P)=\frac{P^2-100}{2P}$

I.6 FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA EXPLÍCITA E IMPLÍCITA

Una función está expresada en forma *explícita* si una de las variables está despejada. Por ejemplo:
$y=\frac{4x^2-7x}{11x+8}$.

Cuando una función, definida en el dominio de sus variables, se escribe de la forma $f(x,y)=0$, se dice que y es una función implícita de x, o que x es una función implícita de y. En otras palabras, una función está expresada en forma *implícita* si ninguna de las variables está despejada. Por ejemplo: $2x^2y-5x-18y+10=0$.

No existe una regla definida para transformar una función expresada en forma implícita en explícita, por ello, de forma particular es necesario aplicar recursos matemáticos conducentes a despejar la variable dependiente.

Ejemplos.
Transformar las siguientes funciones expresadas en forma implícita a explícita:

1) $9xy-2x-3y-16=0$
Solución:
dejando los términos con y en el primer miembro:
$9xy-3y=2x+16$
factorizando y:
$y(9x-3)=2x+16$
despejando y:
$y=\frac{2x+16}{9x-3}$

2) $4x^2y-7x^3-2xy+17x+6y+15=0$
Solución:
dejando los términos con y en el primer miembro:
$4x^2y-2xy+6y=7x^3-17x-15$
factorizando y:

$$y\left(4x^2-2x+6\right)=7x^3-17x-15$$

despejando y:

$$y=\frac{7x^3-17x-15}{4x^2-2x+6}$$

3) $5y^2+8x-10x^3y^2-13=0$

Solución:

dejando los términos con y en el primer miembro:

$$5y^2-10x^3y^2=-8x+13$$

factorizando y:

$$y^2\left(5-10x^3\right)=-8x+13$$

se despeja y^2:

$$y^2=\frac{-8x+13}{5-10x^3}$$

extrayendo la raíz cuadrada positiva se obtiene y:

$$y=\sqrt{\frac{-8x+13}{5-10x^3}}$$

4) $\dfrac{5y-6x}{4y-1}+12x^2=0$

Solución:

multiplicando por el denominador:

$$5y-6x+12x^2\left(4y-1\right)=0\left(4y-1\right)$$

eliminando los paréntesis:

$$5y-6x+48x^2y-12x^2=0$$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$$5y+48x^2y=12x^2+6x$$

factorizando y:

$$y\left(5+48x^2\right)=12x^2+6x$$

despejando y:

$$y=\frac{12x^2+6x}{5+48x^2}$$

5) $\dfrac{3x}{y}+2y-4=0$

Solución:

multiplicando por y:

$$3x+2y^2-4y=0$$

ordenando con respecto a y:

$$2y^2-4y+3x=0$$

esto representa una ecuación de segundo grado donde:

$$a=2,\quad b=-4,\quad c=3x$$

aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y tomando la raíz positiva:

$$y=\frac{-(-4)+\sqrt{(-4)^2-4(2)(3x)}}{2(2)}=\frac{4+\sqrt{16-24x}}{4}$$

reduciendo:

$$y=1+\sqrt{\frac{16-24x}{16}}$$

finalmente:

$$y=1+\sqrt{1-1.5x}$$

6) $9x-\frac{4+7\cos y^3}{5}=0$

Solución:
rescribiendo la igualdad:

$$\frac{4+7\cos y^3}{5}=9x$$

multiplicando por 5:

$$4+7\cos y^3=45x$$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$$7\cos y^3=45x-4$$

$$\cos y^3=\frac{45x-4}{7}$$

aplicando la función inversa del coseno:

$$\cos^{-1}\left(\cos y^3\right)=\cos^{-1}\left(\frac{45x-4}{7}\right)$$

$$y^3=\cos^{-1}\left(\frac{45x-4}{7}\right)$$

extrayendo la raíz cúbica se obtiene y :

$$y=\sqrt[3]{\cos^{-1}\left(\frac{45x-4}{7}\right)}$$

7) $2\ln xy-4x^2+12=0$

Solución:
ordenando:

$$2\ln xy=4x^2-12$$

$$\ln xy=\frac{4x^2-12}{2}=2x^2-6$$

aplicando la propiedad del producto de logaritmos:

$$\ln x+\ln y=2x^2-6$$

dejando los términos con y en el primer miembro:

$$\ln y=2x^2-6-\ln x$$

aplicando la función exponencial:

$$e^{\ln y}=e^{\left(2x^2-6-\ln x\right)} \quad \Rightarrow \quad y=e^{\left(2x^2-6-\ln x\right)}$$

I.7 FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Sea una variable t denominada *parámetro*. Si $x = f(t)$ y $y = f(t)$ son dos funciones con el mismo dominio, entonces se dice que las dos ecuaciones forman un conjunto de ecuaciones paramétricas.

Las coordenadas (x, y) de un punto de una curva pueden ser funciones del parámetro, ya que para cada valor que tome t se tendrá un punto P. Por ejemplo, si se tabula a las ecuaciones paramétricas $\left.\begin{array}{l} x = 3t \\ y = t^2 \end{array}\right\}$ se tiene:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-9	-6	-3	0	3	6	9
y	9	4	1	0	1	4	9
$P(x,y)$	(-9,9)	(-6,4)	(-3,1)	(0,0)	(3,1)	(6,4)	(9,9)

Esto significa que las ecuaciones representan a la función $y = \frac{x^2}{9}$.

Es importante señalar que no todas las ecuaciones paramétricas representan funciones.

Para transformar una función expresada por ecuaciones paramétricas en una función explícita de la forma $y = f(x)$ se despeja de ambas el parámetro, se igualan las ecuaciones y se procede a despejar la variable dependiente.

Ejemplos.
Transformar las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica en forma explícita:

1) $\left.\begin{array}{l} x = 3t \\ y = t^2 \end{array}\right\}$

Solución:
despejando t de la primera ecuación:

$$t = \frac{x}{3} \qquad \_\,[A]$$

despejando t de la segunda ecuación:

$$t = \sqrt{y} \qquad \_\,[B]$$

igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:

$$\frac{x}{3} = \sqrt{y}$$

elevando al cuadrado:

$$y = \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{9}$$

Nótese como se obtiene el mismo resultado si se sustituye $[A]$ en la segunda ecuación.

2) $\left.\begin{array}{l} x = t^2 + 2t \\ y = t - 2 \end{array}\right\}$

Solución:
de la primera ecuación, se suma y resta uno para completar el trinomio cuadrado perfecto:
$x = t^2 + 2t + 1 - 1 = (t+1)^2 - 1 \qquad \_\,[A]$
despejando t:
$t = \sqrt{x+1} - 1$
despejando t de la segunda ecuación:
$t = y + 2 \qquad \_\,[B]$
igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:
$\sqrt{x+1} - 1 = y + 2$
$y = \sqrt{x+1} - 3$

3) $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \sqrt{t-6} \end{array}\right\}$
Solución:
despejando t de la primera ecuación:
$t = \dfrac{1}{x} \qquad \_\,[A]$
despejando t de la segunda ecuación:
$t = y^2 + 6 \qquad \_\,[B]$
igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:
$\dfrac{1}{x} = y^2 + 6$
extrayendo la raíz cuadrada positiva:
$y = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 6}$

4) $\left.\begin{array}{l} x = 2t + 4 \\ y = 8t - 3 \end{array}\right\}$
Solución:
despejando t de la primera ecuación:
$t = \dfrac{x-4}{2} \qquad \_\,[A]$
despejando t de la segunda ecuación:
$t = \dfrac{y+3}{8} \qquad \_\,[B]$
igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:
$\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+3}{8}$
eliminando los denominadores:
$8(x-4) = 2(y+3)$
$8x - 32 = 2y + 6$

$$y=\frac{8x-38}{2}=4x-19$$

5) $\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2-5t} \\ y&=(4t+7)^2 \end{aligned}\right\}$

Solución:
despejando t de la primera ecuación:

$$2-5t=\frac{1}{x}$$

$$t=\frac{\frac{1}{x}-2}{-5} \qquad \_\,[A]$$

despejando t de la segunda ecuación:

$$t=\frac{\sqrt{y}-7}{4} \qquad \_\,[B]$$

igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:

$$\frac{\frac{1}{x}-2}{-5}=\frac{\sqrt{y}-7}{4}$$

multiplicando ambos miembros por -20:

$$4\left(\frac{1}{x}-2\right)=-5\left(\sqrt{y}-7\right)$$

$$\frac{4}{x}-8=-5\sqrt{y}+35$$

$$y=\left(\frac{\frac{4}{x}-43}{-5}\right)^2=\left(\frac{43x-4}{5x}\right)^2$$

6) $\left.\begin{aligned} x&=(7t-2)^3 \\ y&=t^2-6t+11 \end{aligned}\right\}$

Solución:
despejando t de la primera ecuación:

$$t=\frac{\sqrt[3]{x}+2}{7} \qquad \_\,[A]$$

en la segunda ecuación, se resta y se suma dos para completar el trinomio cuadrado perfecto:

$$y=t^2-6t+11-2+2=t^2-6t+9+2=(t-3)^2+2$$

despejando t:

$$t=\sqrt{y-2}+3 \qquad \_\,[B]$$

igualando las ecuaciones $[A]$ y $[B]$:

$$\frac{\sqrt[3]{x}+2}{7}=\sqrt{y-2}+3$$
$$\frac{\sqrt[3]{x}+2}{7}-3=\sqrt{y-2}$$
$$y=\left(\frac{\sqrt[3]{x}-19}{7}\right)^2+2$$

I.8 FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función biyectiva con dominio A y rango B. Entonces su *función inversa* f^{-1} tiene domino B y rango A y la define:

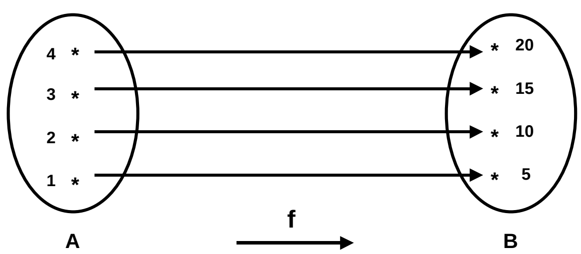
$$f^{-1}(y)=x \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=y$$

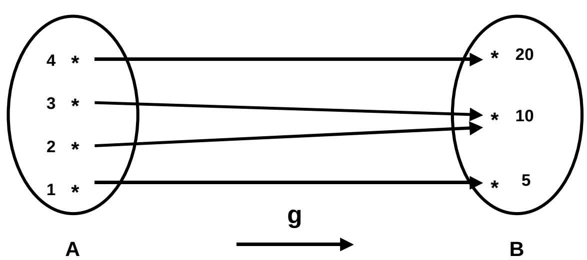
para cualquier y en B.

Esto significa que:

Dominio de f^{-1} = Rango de f
Rango de f^{-1} = Dominio de f

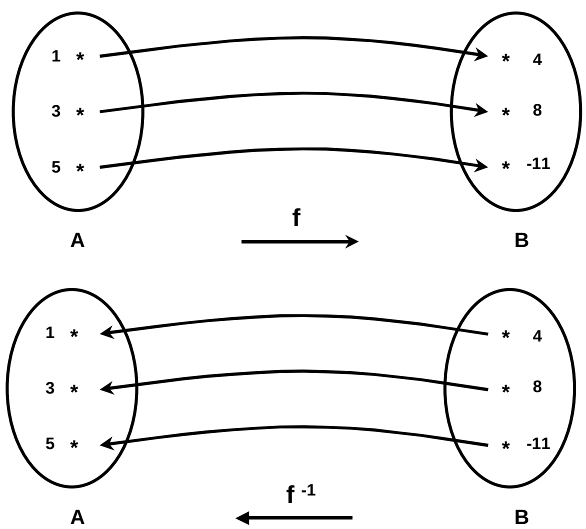
Nótese como no todas las funciones tienen inversa, sólo aquellas que sean biyectivas. En los siguientes diagramas se aprecia que f si tiene inversa y g no tiene inversa, ya que no cumple con la condición de ser función biyectiva.





Nota: En la notación $f^{-1}(x)$ el índice -1 no tiene el significado en álgebra como exponente. Esto es: $f^{-1}(x)\neq\frac{1}{f(x)}$.

Ejemplo.
Si $f(1)=4, \quad f(3)=8 \quad y \quad f(5)=-11$, encontrar $f^{-1}(4), \quad f^{-1}(8) \quad y \quad f^{-1}(-11)$
Solución.
A partir de la definición de función inversa, se tiene que:
$f^{-1}(4)=1$ porque $f(1)=4$
$f^{-1}(8)=3$ porque $f(3)=8$
$f^{-1}(-11)=5$ porque $f(5)=-11$
El siguiente diagrama muestra las correspondencias:



En la función inversa se intercambian cada una de las parejas ordenadas que constituyen a la función original: si $(x,y)\in f(x) \quad \Leftrightarrow \quad (y,x)\in f^{-1}(x)$

Para obtener la función inversa de una función biyectiva:
1) Se escribe $y=f(x)$
2) Se intercambia x por y
3) Se despeja y para encontrar $f^{-1}(x)$.

Ejemplos.
Encontrar la función inversa de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\dfrac{x+4}{10}$
Solución:
$y=\dfrac{x+4}{10}$
$x=\dfrac{y+4}{10}$
$10x=y+4$
$y=10x-4$

$f^{-1}(x) = 10x - 4$

2) $f(x) = x^3 - 5$

Solución:

$y = x^3 - 5$

$x = y^3 - 5$

$x + 5 = y^3$

$y = \sqrt[3]{x+5}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}$

3) $f(x) = \sqrt{2x+9}$

Solución:

$y = \sqrt{2x+9}$

$x = \sqrt{2y+9}$

$x^2 = 2y + 9$

$y = \dfrac{x^2 - 9}{2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2}$

4) $f(x) = \dfrac{8}{3-x}$

Solución:

$y = \dfrac{8}{3-x}$

$x = \dfrac{8}{3-y}$

$(3-y)x = 8$

$3x - xy = 8$

$3x - 8 = xy$

$y = \dfrac{3x-8}{x}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{3x-8}{x}$

5) $f(x) = \left(6\sqrt{x} - 7\right)^5$

Solución:

$y = \left(6\sqrt{x} - 7\right)^5$

$x = \left(6\sqrt{y} - 7\right)^5$

$$\sqrt[5]{x} = 6\sqrt{y} - 7$$
$$\sqrt[5]{x} + 7 = 6\sqrt{y}$$
$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt[5]{x} + 7}{6}$$
$$y = \left(\frac{\sqrt[5]{x} + 7}{6} \right)^2$$
$$f^{-1}(x) = \left(\frac{\sqrt[5]{x} + 7}{6} \right)^2$$

6) $f(x) = 2x^2 - 20x + 48$

Solución:

$$y = 2x^2 - 20x + 48$$
$$x = 2y^2 - 20y + 48$$

se suma y se resta 2 para completar el trinomio cuadrado perfecto:

$$x = 2y^2 - 20y + 48 + 2 - 2$$
$$x = 2y^2 - 20y + 50 - 2$$

se factoriza 2:

$$x = 2\left(y^2 - 10y + 25\right) - 2$$

se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$x = 2(y+5)^2 - 2$$
$$x + 2 = 2(y+5)^2$$
$$(y+5)^2 = \frac{x+2}{2}$$
$$y + 5 = \sqrt{\frac{x+2}{2}}$$
$$y = \sqrt{\frac{x+2}{2}} - 5$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+2}{2}} - 5$$

I.9 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

La gráfica de una función contiene todos los puntos que representan parejas ordenadas de la forma (x, y) en el plano cartesiano tales que satisfacen la ecuación[3].

[3] Como en una función f, cada número x en el dominio tiene una y solo una imagen, no todo grupo de puntos en el plano cartesiano representa la gráfica de una función. Por tanto, la gráfica de una función f no puede contener dos puntos con la misma abscisa x y diferentes ordenadas y. Para fines prácticos, para saber si una gráfica representa a una función basta con trazar líneas verticales, y si las intersecta en un solo punto, es función.

Para trazar la gráfica de una función, normalmente se despeja la variable dependiente y posteriormente se determina su dominio. Después, se eligen convenientemente los valores de x para tabular y obtener así suficientes valores de y. Una vez obtenido esto, se ubican los puntos en el plano y se unen. Es recomendable utilizar las escalas apropiadas en los ejes coordenados para mostrar mejor su comportamiento.

Ejemplos.
Graficar las siguientes funciones estableciendo su dominio.

1) $y = \frac{1}{2x-8}$

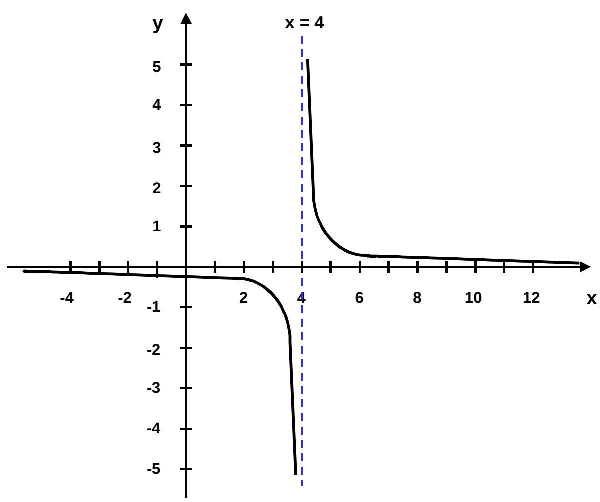
Solución:

Si el símbolo $\exists$ significa *existe* y el símbolo $\forall$ significa *para toda*, entonces: $\exists\ y\ \forall x$ excepto en $x = 4$

$D_f = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	3.8	3.9
y	-0.071	-0.083	-0.100	-0.125	-0.167	-0.250	-0.500	-2.5	-5

x	4	4.1	4.2	5	6	7	8	9	10
y	no definido	5	2.5	0.500	0.250	0.167	0.125	0.100	0.083



2) $y = \frac{1}{4-x^2}$

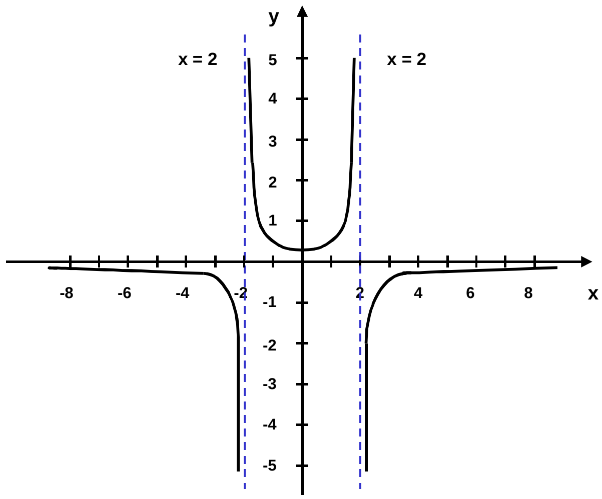
Solución:

$\exists\ y\ \forall x$ excepto en $x = 2$ y $x = -2$

$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

x	-5	-4	-3	-2.1	-2	-1.9	-1
y	-0.047	-0.083	-0.200	-2.439	no definido	2.564	0.333

x	0	1	1.9	2	2.1	3	4	5
y	0.250	0.333	2.564	no definido	-2.439	-0.200	-0.083	-0.047



3) $y=-\dfrac{9}{x^2}$

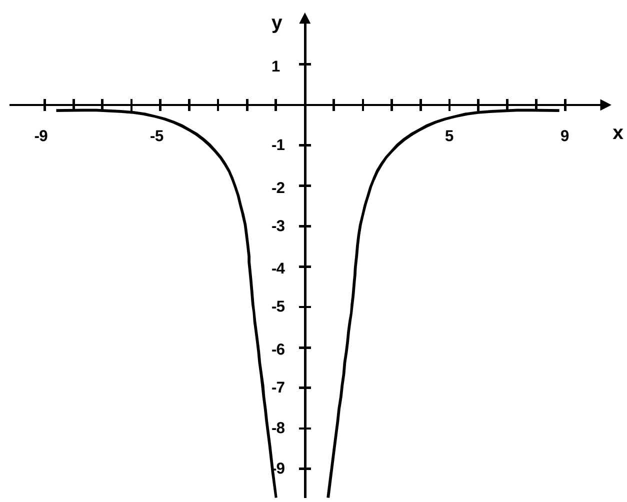
Solución:

$\exists\ y\ \forall x$ excepto en $x=0$

$D_f=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	-0.140	-0.183	-0.250	-0.360	-0.562	-1	-2.250	-9	no definido

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-9	-2.250	-1	-0.562	-0.360	-0.250	-0.183	-0.140



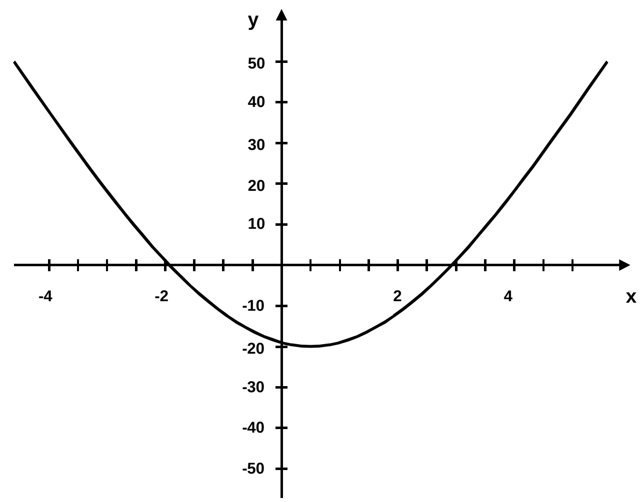
4) $y=3x^2-3x-18$

Solución:

$\exists\, y\ \forall x$

$D_f = (-\infty, \infty)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	42	18	0	-12	-18	-18	-12	0	18	42



5) $y = -\sqrt{5x-10}$

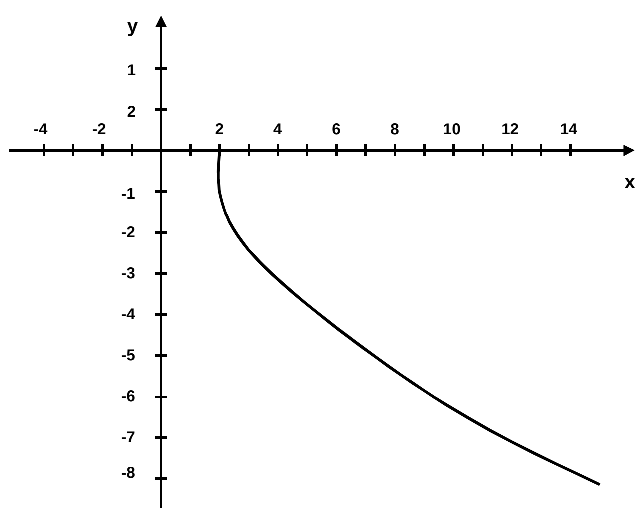
Solución:

Resolviendo la desigualdad: $5x-10 \geq 0$, se tiene que:

$\exists\, y\ \forall x$ con $x \geq 2$

$D_f = [2, \infty)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	no definido	0	-2.236	-3.162	-3.872	-4.472	-5	-5.477	-5.916	-6.324	-6.708	-7.071	-7.416



6) $y=\sqrt{\dfrac{36-4x^2}{9}}$

Solución:

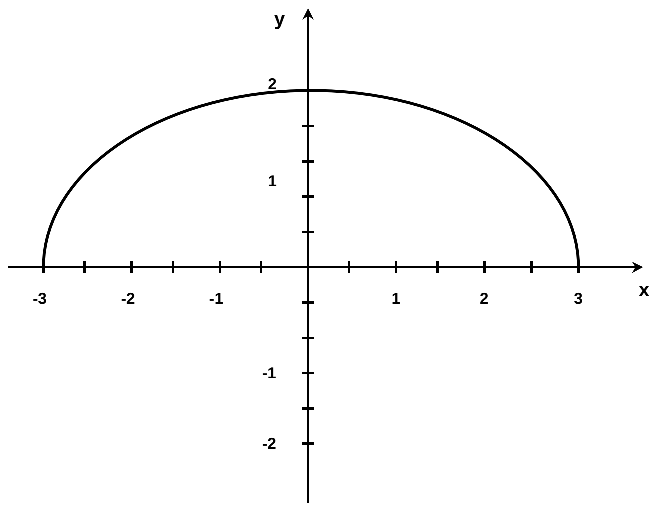
Resolviendo la desigualdad: $\dfrac{36-4x^2}{9}\geq 0$, se tiene que:

$36-4x^2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad 4x^2<36 \quad\Rightarrow\quad x^2<9$

$\exists\, y\ \forall x$ con $-3\leq x\leq 3$

$D_f=[-3,3]$

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	0	1.105	1.490	1.732	1.885	1.972	2	1.972	1.885	1.732	1.490	1.105	0



I.10 FUNCIONES DEFINIDAS POR INTERVALOS

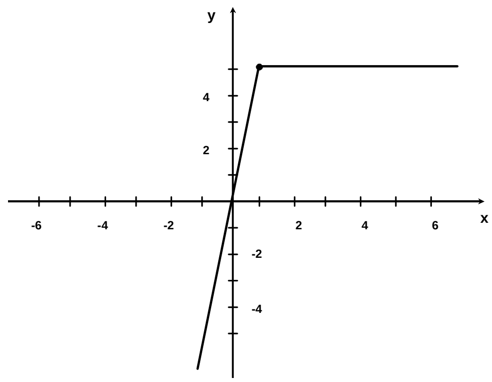
Una función $f(x)$ puede estar definida por intervalos de forma tal que tiene un comportamiento distinto en cada sección, por lo que se pueden presentar cambios bruscos en su desarrollo. Su dominio está dado por la unión de sus intervalos.

Ejemplos.
Explicar el comportamiento de las siguientes funciones y establecer su dominio.

1) $f(x)=\begin{cases}5x & x\leq 1\\ 5 & x>1\end{cases}$

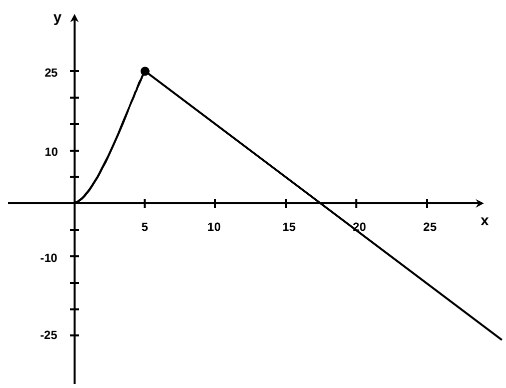
Solución.
La función es lineal hasta 1 y es constante en 5 desde un valor mayor de 1.

$D_f=(-\infty,\infty)$



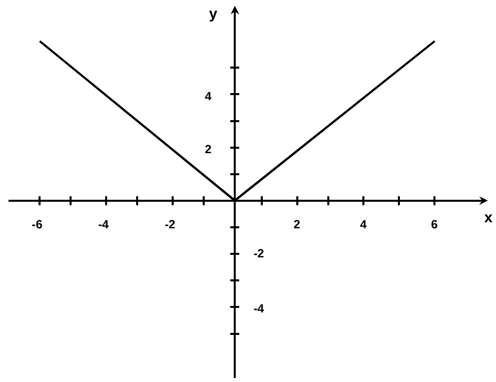
2) $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 5 \\ 35-2x & x>5 \end{cases}$

Solución.
La función es cuadrática desde cero hasta 5 y se convierte en una recta de pendiente negativa a partir de un valor mayor a 5.
$D_f = [0, \infty)$



3) $f(x)=\begin{cases} -x & x<0 \\ x & x \ge 0 \end{cases}$

Solución.
Si x vale cero, la función es cero. Si x es positiva, la función toma su valor idéntico. Si x es negativa, la función toma su inverso aditivo. Por lo tanto, representa a la función $f(x)=|x|$.
$D_f = (-\infty, \infty)$

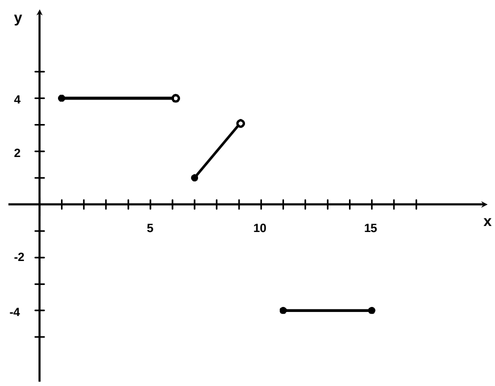


4) $f(x)=\begin{cases} 4 & 1\le x<6 \\ x-6 & 7\le x<9 \\ -4 & 11\le x\le 15 \end{cases}$

Solución.

La función es constante en 4 desde 1 hasta antes de 6, a partir de 7 y hasta antes de nueve es igual a la función identidad. Finalmente, la función es constante en –4 a partir de 11 y hasta 15.

$D_f = [1, 6)\cup[7, 9)\cup[11, 15]$

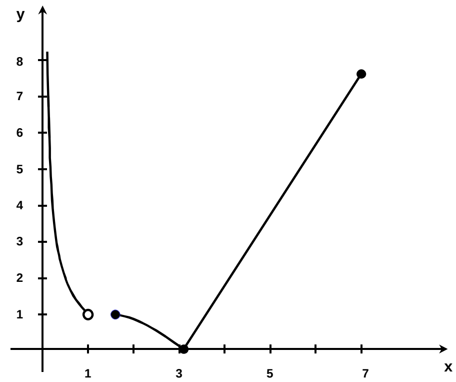


5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<1 \\ sen\, x & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi \\ -2\pi+2x & \pi<x\le 7 \end{cases}$

Solución.

La función es de proporcionalidad inversa si es mayor de cero y menor de 1, es igual al seno desde $\frac{\pi}{2}$ y hasta π. Finalmente, la función es lineal después de π y hasta 7.

$D_f = (0, 1)\cup\left[\frac{\pi}{2}, 7\right]$


y
8
7
6
5
4
3
2
1
1
3
5
7
x