LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

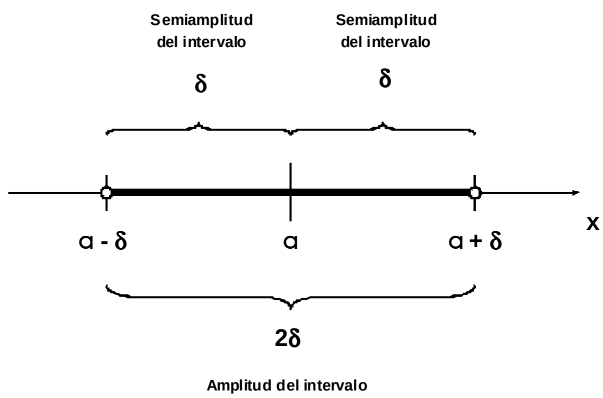
UNIDAD II

II.1 ENTORNOS

Se denomina *entorno* de un punto a en x, al intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ donde δ es la semiamplitud del intervalo.

El entorno de a, en notación de conjuntos puede escribirse como: $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$, o bien como un valor absoluto: $|x-a| < \delta$.

Gráficamente se representa así:



Ejemplo.
Obtener el entorno del punto $a = 5$ y con la semiamplitud $\delta = 0.6$.

Solución.
Entorno de $a = (5-0.6, 5+0.6) = (4.4, 5.6)$

$= \{x \mid \quad 4.4 < x < 5.6\}$

$= |x-5| < 0.6$

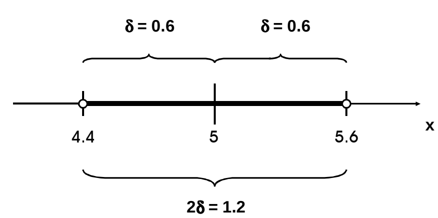
esto significa que el entorno de a son todos los valores de x desde 4.4 hasta 5.6, pero sin incluir a los extremos. Verificando algunos valores dentro del entorno:

si $x = 4.7$:

$|4.7-5| = |-0.3| = 0.3 < 0.6$

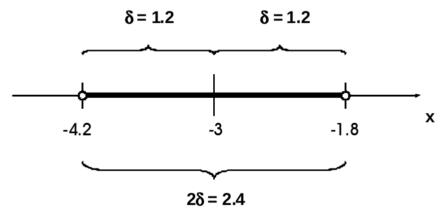
si $x = 5.42$:

$|5.42-5| = 0.42 < 0.6$



Ejemplo.
Obtener el entorno del punto $a = -3$ y con la semiamplitud $\delta = 1.2$.

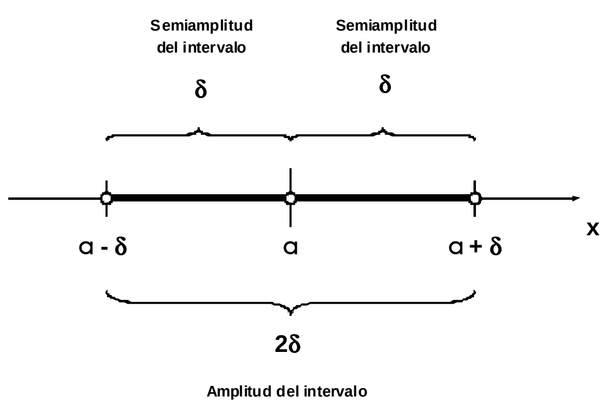
Solución.
Entorno de $a = (-3 - 1.2, -3 + 1.2) = (-4.2, -1.8)$
$= \{x \mid \ -4.2 < x < -1.8\}$
$= |x + 3| < 1.2$
esto significa que el entorno de a son todos los valores de x desde -4.2 hasta -1.8 , pero sin incluir a los extremos:
si $x = -3.8$:
$|-3.8 + 3| = |-0.8| = 0.8 < 1.2$
si $x = -2$:
$|-2 + 3| = 1 < 1.2$



Se define como *entorno reducido* de un punto a en x al entono que excluye al propio punto a . Es decir, es el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ donde $x \neq a$.

El entorno reducido de a también puede escribirse como: $\{x \mid \ a - \delta < x < a + \delta, \quad x \neq a\}$, o bien como: $0 < |x - a| < \delta$.

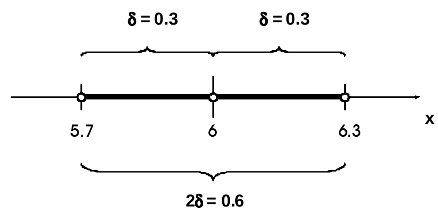
Gráficamente esto es:



Ejemplo.
Obtener el entorno reducido del punto $a = 6$ y con la semiamplitud $\delta = 0.3$

Solución.
Entorno reducido de $a = (6 - 0.3, 6 + 0.3) = (5.7, 6.3)$ si $x \neq 6$
$= \{x \mid \ 5.7 < x < 6.3, \quad x \neq 6\}$
$= 0 < |x - 6| < 0.3$

esto significa que el entorno reducido de a son todos los valores de x desde 5.7 hasta 6.3, quitando el 6 y sin incluir a los extremos:



si $x = 6.15$:

$$|6.15 - 6| = 0.15 < 0.3$$

si $x = 5.93$:

$$|5.93 - 6| = |-0.07| = 0.07 < 0.3$$

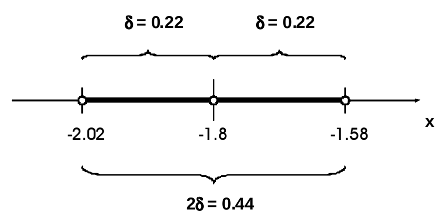
Ejemplo.
Obtener el entorno reducido del punto $a = -1.8$ y con la semiamplitud $\delta = 0.22$.

Solución.
Entorno reducido de $a = (-1.8 - 0.22, -1.8 + 0.22) = (-2.02, -1.58)$

$$= \{x \mid \quad -2.02 < x < -1.58, \quad x \neq -1.8\}$$

$$= 0 < |x + 1.8| < 0.22$$

esto significa que el entorno reducido de a son todos los valores de x desde -2.02 hasta -1.58, quitando el -1.8 y sin incluir a los extremos:



si $x = -1.63$:

$$|-1.63 + 1.8| = 0.17 < 0.22$$

si $x = -2.01$:

$$|-2.01 + 1.8| = |-0.21| = 0.21 < 0.22$$

II.2 DEFINICIÓN DE LÍMITE

Si se desea investigar el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 + 1$ para valores cercanos a 3 tanto menores como mayores a este valor. En la tabla siguiente se muestran los valores de $f(x)$ para valores aproximados pero no iguales a 3:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5	7.25	3.5	13.25
2.6	7.76	3.4	12.56
2.7	8.29	3.3	11.89
2.8	8.84	3.2	11.24
2.9	9.41	3.1	10.61
2.95	9.7025	3.05	10.3025
2.99	9.9401	3.01	10.0601
2.999	9.994001	3.001	10.006001
2.9999	9.99940001	3.0001	10.00060001

A partir de la tabla, se demuestra que cuando x está cada vez más cerca de 3 por cualquiera de los dos lados, $f(x)$ se aproxima a 10. Este hecho se expresa al decir que "el límite de la función $f(x) = x^2 + 1$ cuando x tiende a 3 es igual a 10". La notación para esta expresión es $\lim_{x \to 3} (x^2 + 1) = 10$.

Como se puede apreciar del ejemplo anterior, el interés se centra en conocer el valor de la función $f(x)$ cuando x se aproxima a un valor a, pero sin ubicarse en dicho valor. Esto es, si x se acerca más y más a a (pero x no es igual a a), la función $f(x)$ se acerca más y más a un valor L. Esto significa que $f(x)$ *tiende a* L *si* x *tiende a* a.

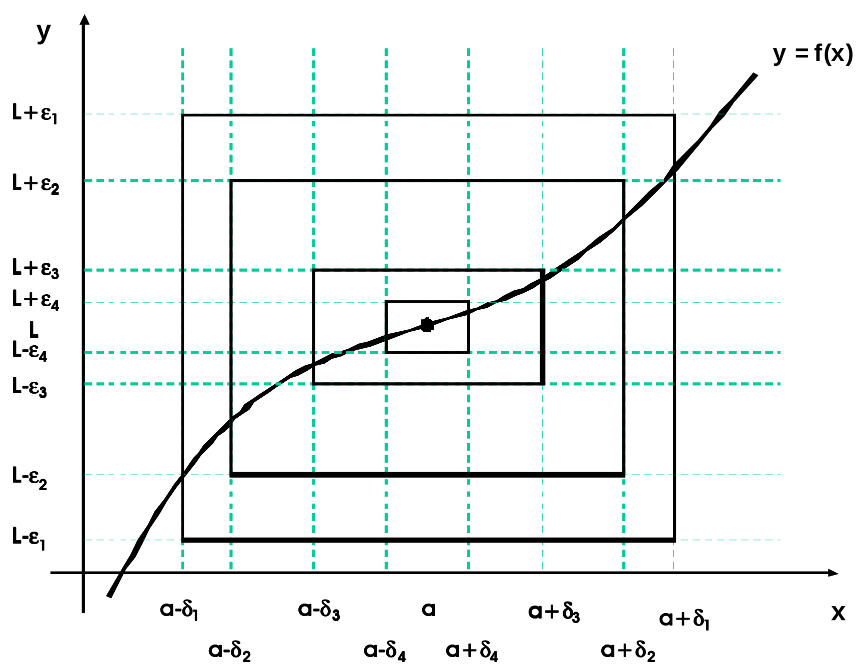
La frase "x tiende a a" significa que independientemente de lo próximo que esté x del valor a, existe siempre otro valor de x (distinto de a) en el dominio de f que está aún más próximo a a.

Definición de límite:

Una función f tiende hacia el límite L en a si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Se puede deducir de la definición, que para que exista el límite L de una función $f(x)$ es necesario que se forme un entorno de L en $f(x)$ siempre y cuando se pueda generar un entorno reducido de a en x.

Dado que el entorno de L es: $\{y \mid L - \varepsilon < y < L + \varepsilon\}$, el entorno reducido de a es: $\{x \mid a - \delta < x < a + \delta, \quad x \neq a\}$, donde δ y ε pueden se tan pequeñas como se desee, por lo que se pueden generar una infinidad de entornos cada vez más pequeños, siempre que $x \neq a$. Esto puede interpretarse como la formación de rectángulos cada vez más pequeños que incluyan al punto (a, L). Gráficamente esto es:



Nótese como cada entorno $L - \varepsilon_i < y < L + \varepsilon_i$ se forma respondiendo a los entornos $a - \delta_i < x < a + \delta_i$, y a medida que δ tiende a cero (sin llegar a serlo), también ε tiende a cero.

En caso de existir, el límite se representa en forma simbólica como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se lee: "*el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tienda hacia* a *es* L".

Una función no puede tender a dos límites distintos a la vez. Esto es, si el límite de una función existe, es único:

El límite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existe si el límite por la izquierda,

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

y el límite por la derecha,

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

son iguales.

Estos dos últimos límites se conocen como *límites laterales*, lo que significa que se pueden aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como se quiera, ya sea por la derecha o por la izquierda. De lo anterior, se cumple lo siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \qquad y \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Para fines prácticos, para determinar si una función $f(x)$ tiene límite cuando $x \to a$ basta con aplicar la definición y establecer una expresión que relacione a δ y ε. En caso de no encontrar una relación, la función no tendrá límite en ese punto.

Ejemplos.
A través de la definición, calcular formalmente los siguientes límites:

1) $\lim_{x \to 2} (4x + 5)$

Solución:

$\lim_{x \to 2} (4x + 5) = 4(2) + 5 = 8 + 5 = 13$

aplicando la definición:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - a| < \delta$$

$$|4x + 5 - 13| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - 2| < \delta$$

$$|4x - 8| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - 2| < \delta$$

$$|4(x - 2)| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - 2| < \delta$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad |x - 2| < \delta$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

$\therefore$ el límite existe y es 13.

2) $\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x-6\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x-6\right)=3^2-2(3)-6=9-6-6=-3$$

aplicando la definición:

$$\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-a\right|<\delta$$

$$\left|x^2-2x-6-(-3)\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-3\right|<\delta$$

$$\left|x^2-2x-3\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-3\right|<\delta$$

$$\left|(x+1)(x-3)\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-3\right|<\delta$$

$$\left|x-3\right|<\frac{\varepsilon}{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-2\right|<\delta$$

$$\delta=\frac{\varepsilon}{x+1}$$

$\therefore$ el límite existe y es -3.

3) $\lim_{x\to 4}\left(x^3+x^2-x-1\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 4}\left(x^3+x^2-x-1\right)=4^3+4^2-4-1=64+16-4-1=75$$

aplicando la definición:

$$\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-a\right|<\delta$$

$$\left|x^3+x^2-x-1-75\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-4\right|<\delta$$

$$\left|x^3+x^2-x-76\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-4\right|<\delta$$

$$\left|(x-4)\left(x^2+5x+19\right)\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-4\right|<\delta$$

$$\left|x-4\right|<\frac{\varepsilon}{x^2+5x+19} \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-4\right|<\delta$$

$$\delta=\frac{\varepsilon}{x^2+5x+19}$$

$\therefore$ el límite existe y es 75.

4) $\lim_{x\to -5}\left(-\frac{2}{x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to -5}\left(-\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{5}$$

aplicando la definición:

$$\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|x-a\right|<\delta$$

$$\left|-\frac{2}{x}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-(-5)|<\delta$$

$$\left|\frac{-10-2x}{5x}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x+5|<\delta$$

$$\left|\frac{-2(x+5)}{5x}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x+5|<\delta$$

aplicando el valor absoluto a los términos del producto:

$$2\left|\frac{(x+5)}{5x}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x+5|<\delta$$

$$|x+5|<\frac{5x\varepsilon}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-5|<\delta$$

$$\delta=\frac{5x\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ el límite existe y es $\frac{2}{5}$.

5) $\lim_{x\to 1}\sqrt{2x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{2x}=\sqrt{2(1)}=\sqrt{2}$$

aplicando la definición:

$$|f(x)-L|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-a|<\delta$$

$$\left|\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-1|<\delta$$

multiplicando por el conjugado del binomio:

$$\left|\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-1|<\delta$$

$$\left|\frac{2x-2}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-1|<\delta$$

$$\left|\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x}+\sqrt{2}}\right|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-1|<\delta$$

$$|x-1|<\frac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)\varepsilon}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-1|<\delta$$

$$\delta=\frac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2}\right)\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ el límite existe y es $\sqrt{2}$.

6) $\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{-3+3}=\frac{1}{0}\quad (No\ existe)$$

si se desea aplicar la definición:

$$|f(x)-L|<\varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |x-a|<\delta$$

no se puede ya que L no es un valor definido, por lo tanto, el límite no existe.

II.3 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sean $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ dos límites que existen y c una constante. Entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a}[c]=c$

El límite de una constante es la misma constante.

2. $\lim\limits_{x\to a}[x]=a$

El límite de la función identidad es igual al valor de a.

3. $\lim\limits_{x\to a}[c\cdot f(x)]=c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

El límite de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por el límite de la función.

4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

El límite de una suma algebraica es la suma algebraica de los límites.

5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

El límite de un producto es el producto de los límites.

6. $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $\qquad \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

El límite de un cociente es el cociente de los límites.

7. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$ $\qquad n\in N$

El límite de la potencia de una función es el límite de la función elevada a la potencia.

8. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ $\qquad n\in N$ $\qquad$ (si n es par se asume que $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$)

El límite de una raíz es la raíz del límite.

Ejemplos.
Aplicando las propiedades, calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 4} 5=5$

2) $\lim\limits_{x\to -7} x=-7$

3) $\lim_{x\to 2} 6x^2 = 6(2)^2 = 6(4) = 24$

4) $\lim_{x\to 3} 3x^2 - 5x + 9 = 3(3)^2 - 5(3) + 9 = 3(9) - 5(3) + 9 = 27 - 15 + 9 = 21$

5) $\lim_{x\to -1} 5x^3 - 8x^2 + 10x - 15 = 5(-1)^3 - 8(-1)^2 + 10(-1) - 15 = 5(-1) - 8(1) + 10(-1) - 15$

$$= -5 - 8 - 10 - 15 = -38$$

6) $\lim_{x\to 5} \frac{1}{4x-6} = \frac{1}{4(5)-6} = \frac{1}{20-6} = \frac{1}{14}$

7) $\lim_{x\to -4} \frac{2x}{6x-10} = \frac{2(-4)}{6(-4)-10} = \frac{-8}{-24-10} = \frac{-8}{-34} = \frac{4}{17}$

8) $\lim_{x\to 2} (2x)^3 = (2(2))^3 = 4^3 = 64$

9) $\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{8x} = \sqrt[3]{8(8)} = \sqrt[3]{64} = 4$

10) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza el denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

11) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza el numerador:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x+3) = 3+3 = 6$$

12) $\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2+x-6} = \frac{2(2)-4}{2^2+2-6} = \frac{4-4}{4+2-6} = \frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

13) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-6x+8} = \frac{4^2-16}{4^2-6(4)+8} = \frac{16-16}{16-24+8} = \frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{x+4}{x-2} = \frac{4+2}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

14) $\lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+3x+2} = \frac{((-1)^2-1)(-1+2)}{(-1)^2+3(-1)+2} = \frac{(1-1)(-1+2)}{1-3+2} = \frac{0}{0}$

a fin de eliminar la indeterminación se factoriza el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -1-1 = -2$$

15) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} = \frac{1^2-1}{1^2-3(1)+2} = \frac{1-1}{1-3+2} = \frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-2}=\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

16) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x^2-x-12}=\frac{4^2+4-20}{4^2-4-12}=\frac{16+4-20}{16-4-12}=\frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x^2-x-12}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+5)(x-4)}{(x+3)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+5}{x+3}=\frac{4+5}{4+3}=\frac{9}{7}$$

17) $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-11x+30}{x^2-13x+42}=\frac{6^2-11(6)+30}{6^2-13(6)+42}=\frac{36-66+30}{36-78+42}=\frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza tanto el numerador como el denominador:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-11x+30}{x^2-13x+42}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x-5)}{(x-6)(x-7)}=\lim_{x\to 6}\frac{x-5}{x-7}=\frac{6-5}{6-7}=\frac{1}{-1}=-1$$

18) $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-14x+49}{x-7}=\frac{7^2-14(7)+49}{7-7}=\frac{49-98+49}{7-7}=\frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, si se factoriza el numerador:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-14x+49}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}(x-7)=7-7=0$$

19) $\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=\frac{1}{5-5}=\frac{1}{0}\quad (\textit{no existe})$

20) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2^2-4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4-4}=\frac{0}{0}$

multiplicando por el binomio conjugado del numerador para deshacer la indeterminación:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x^2-4)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}$$

factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{(2+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{4\left(2\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

21) $\lim_{x\to 8}\frac{x+8}{-2x+16}=\frac{8+8}{-2(8)+16}=\frac{8+8}{-16+16}=\frac{16}{0}$

para eliminar la indeterminación se factoriza el denominador:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x+8}{-2x+16}=\lim_{x\to 8}\frac{x+8}{-2(x-8)}$$

como no se puede simplificar, el límite no existe.

22) $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x^2-25}=\frac{5^3-125}{5^2-25}=\frac{125-125}{25-25}=\frac{0}{0}$

a fin de eliminar la indeterminación se factoriza el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2+5x+25}{x+5}=\frac{5^2+5(5)+25}{5+5}$$

$$=\frac{25+25+25}{10}=\frac{75}{10}=\frac{15}{2}$$

23) $\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\frac{7-7}{\sqrt{7-7}}=\frac{0}{\sqrt{0}}=\frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación, se eleva al cuadrado:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{\left(\sqrt{x-7}\right)^2}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{x-7}$$

factorizando el numerador:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x-7}}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}(x-7)=7-7=0$$

24) $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\frac{\sqrt{6-6}}{6-6}=\frac{\sqrt{0}}{0}=\frac{0}{0}$

este límite presenta una indeterminación, sin embargo, elevando al cuadrado:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x-6}\right)^2}{(x-6)^2}=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)^2}$$

factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-6}}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)(x-6)}=\lim_{x\to 6}\frac{1}{x-6}=\frac{1}{6-6}=\frac{1}{0}\quad (no\ existe)$$

25) $\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\frac{\sqrt{10-1}-3}{10-10}=\frac{\sqrt{9}-3}{10-10}=\frac{3-3}{10-10}=\frac{0}{0}$

para eliminar la indeterminación se multiplica por el binomio conjugado del numerador:

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}\left(\frac{\sqrt{x-1}+3}{\sqrt{x-1}+3}\right)=\lim_{x\to 10}\frac{x-1-9}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x-10}{(x-10)\left(\sqrt{x-1}+3\right)}=\lim_{x\to 10}\frac{1}{\sqrt{x-1}+3}=\frac{1}{\sqrt{10-1}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

II.4 LÍMITES INFINITOS

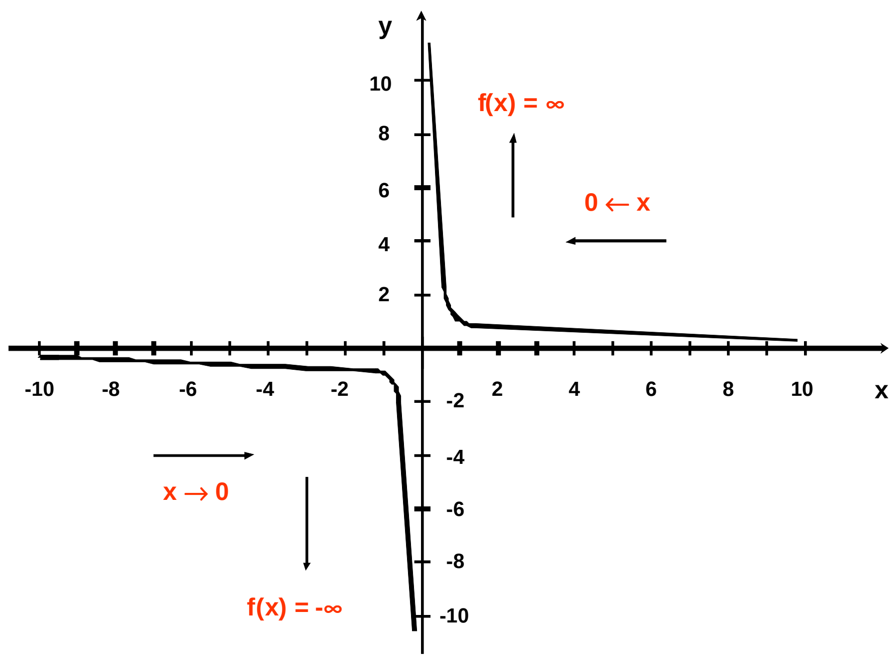
Los tipos de límites en los que una función $f(x)$ se hace infinita (ya sea positiva o negativa) cuando x tiende a a por la izquierda o por la derecha se conocen como *límites infinitos*.

¿Qué ocurre cuando x se aproxima o tiende a cero en la función $f(x)=\frac{1}{x}$?

Tabulando la función se aprecia que cuando x tiende a cero por la derecha, los valores de la función que son positivos, son cada vez más grandes. Es decir, los valores de la función aumentan. Mientras que, cuando x tiende a cero por la izquierda, los valores de la función son negativos, son cada vez más pequeños. Es decir, los valores de la función disminuyen.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
10	0.1	-10	-0.1
5	0.2	-5	-0.2
4	0.25	-4	-0.25
3	0.333	-3	-0.333
2	0.5	-2	-0.5
1	1	-1	-1
0.5	2	-0.5	-2
0.2	5	-0.2	-5
0.1	10	-0.1	-10
0.01	100	-0.01	-100
0.001	1000	-0.001	-1000

Gráficamente en ambos casos, $f(x)$ crece o decrece sin tope, sin fronteras. Esto es,



El símbolo de infinito (∞) no significa que el límite exista, ya que no representa un número real. Simboliza el comportamiento no acotado (sin fronteras) de $f(x)$ cuando x tiende a a. De manera que, al decir que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es infinito" se interpreta que el límite *no existe*.

En general, considérese la función:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

las raíces del polinomio $q(x)$, provocan que la función no esté definida, es decir, sus límites son el infinito. Geométricamente, cada raíz representa a una *asíntota vertical*.

Ejemplos.

1) En la función $f(x)=\frac{1}{x-3}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty\,,\quad \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$$

el valor que anula al denominador es 3, así que el límite en el infinito se presenta en la asíntota $x=3$.

2) En la función $f(x)=\frac{7x}{x^2-25}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{7}{x^2-25}=\infty\,,\quad \lim_{x\to 5^-}\frac{7}{x^2-25}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -5^+}\frac{7}{x^2-25}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to -5^-}\frac{7}{x^2-25}=\infty$$

los valores que anulan al denominador son 5 y -5, así que los límites en el infinito se presentan en las asíntotas $x=5$ y $x=-5$.

3) En la función $f(x)=\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}$, los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty\,,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty\,,\quad \lim_{x\to 4^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -7^+}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to -7^-}\frac{9x-15}{x^3+3x^2-28x}=\infty$$

los valores que anulan al denominador son 0, 4 y -7 respectivamente, así que los límites en el infinito se presentan en las asíntotas $x=0$, $x=4$ y $x=-7$.

II.5 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los límites trigonométricos elementales son aquellos que se obtienen directamente, ya que basta sólo con evaluarlos y recordar los valores notables de dichas funciones.

Ejemplos.
Evaluar los siguientes límites trigonométricos elementales:

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} sen\, x = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.5$

2) $\lim_{x\to 0} 3\cos x = 3\cos(0)=3(1)=3$

3) $\lim_{x\to\pi} \tan x = \tan(\pi)=\infty$

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \cot^2 x = \cot^2\frac{\pi}{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sec x}=\frac{4(0)}{\sec(0)}=\frac{4(0)}{1}=\frac{0}{1}=0$

6) $\lim_{x\to 2\pi}\csc x=\csc(2\pi)=\infty$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{12}{2\cos 4x}=\frac{12}{2\cos 4(0)}=\frac{12}{2\cos(0)}=\frac{12}{2(1)}=\frac{12}{2}=6$

Existen otros límites cuya evaluación no es tan simple. En este sentido, el límite de la función $\frac{sen\,x}{x}$ cuando x tiende a cero es muy importante ya que la resolución de muchos límites trigonométricos se basan en su aplicación.

Por ello, se evalúa en primera instancia:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\frac{sen(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

aparentemente, el límite no existe. Sin embargo, si se tabula la función (x en radianes), se tiene:

x	$\frac{sen\,x}{x}$
± 1	0.841470
± 0.5	0.958851
± 0.4	0.973545
± 0.3	0.985067
± 0.2	0.993346
± 0.1	0.998334
± 0.01	0.999983
± 0.001	0.999999

Como puede apreciarse el límite tiende a la unidad[1]. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$$

Ejemplos.
Considerando el resultado anterior y aplicando identidades trigonométricas, obtener los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{3sen\,2x}{5x}=\frac{3sen\,2(0)}{5(0)}=\frac{3sen(0)}{0}=\frac{0}{0}$

multiplicando y dividiendo por 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3sen\,2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2)(3)sen\,2x}{5(2x)}=\frac{6}{5}(1)=\frac{6}{5}$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{4sen^2 x}{x}=\frac{4sen^2(0)}{0}=\frac{4(0)^2}{0}=\frac{0}{0}$

expresando la potencia como producto:

[1] La demostración formal de este límite puede consultarse en la página 232 del libro *Cálculo Diferencial e Integral*, de J. Stewart incluido en la bibliografía.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4sen^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4sen\,xsen\,x}{x}=\lim_{x\to 0}4sen\,x\frac{sen\,x}{x}=4(sen\,0)(1)=4(0)(1)=0$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{sen\,5x}=\frac{5(0)}{sen\,(5(0))}=\frac{0}{sen\,(0)}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{sen\,5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{sen\,5x}{5x}}=\frac{1}{1}=1$$

En general, $\lim_{u\to 0}\frac{u}{sen\,u}=1$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,8x}{sen\;4x}=\frac{sen\,8(0)}{sen\;(4(0))}=\frac{sen\;(0)}{sen\;(0)}=\frac{0}{0}$

multiplicando y dividiendo por $8x$ y 4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,8x}{sen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8xsen\,8x}{8xsen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x(1)}{sen\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{8(4x)}{4sen\,4x}=\frac{8}{4}(1)=2$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos(0)}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{sen\,x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x\tan\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}(1)\tan\frac{x}{2}=(1)\tan\frac{0}{2}=1\tan(0)=(1)(0)=0$$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\frac{sen^3(2(0))}{(0)sen^2(3(0))}=\frac{(0)^3}{0(0)^2}=\frac{0}{0}$

expresando las potencias como productos y multiplicando y dividiendo por 2 y $(2x)(2x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2)sen\,2xsen^2 2x}{(2x)sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1)sen^2 2x}{sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)(2x)sen\,2xsen\,2x}{(2x)(2x)sen^2 3x}$$

multiplicando y dividiendo por 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 2x}{xsen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)(2x)(1)}{sen^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2)(2)(3x)(3x)}{(3)(3)sen\,3xsen\,3x}=\frac{8}{9}(1)(1)=\frac{8}{9}$$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\frac{\cos(0)-1}{(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $sen^2 x+\cos^2 x=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen^2 x}{x^2}=\frac{-sen\,xsen\,x}{x(x)}=-(1)(1)=-1$$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{7x}=\frac{\tan(0)}{7(0)}=\frac{0}{0}$

aplicando la identidad trigonométrica $\tan x=\frac{sen\,x}{\cos x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x}{\cos x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{7x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{7\cos x}=\frac{1}{7\cos(0)}=\frac{1}{7(1)}=\frac{1}{7}$$

9) $\lim\limits_{x\to 0} x\csc 6x$

aplicando la identidad trigonométrica $\csc x=\frac{1}{sen\,x}$ y multiplicando y dividiendo por 6:

$$\lim_{x\to 0} x\csc 6x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen\,6x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{6sen\,6x}=\frac{1}{6}(1)=\frac{1}{6}$$

10) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=\frac{\tan(\pi)}{\pi-\pi}=\frac{0}{0}$

aplicando las identidades trigonométricas $\tan x=\tan(x-\pi)$ y $\tan x=\frac{sen\,x}{\cos x}$:

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi}\frac{\tan(x-\pi)}{(x-\pi)}=\lim_{x\to \pi}\frac{sen(x-\pi)}{(x-\pi)\cos(x-\pi)}=\lim_{x\to \pi}\frac{1}{\cos(x-\pi)}=\frac{1}{\cos(\pi-\pi)}=\frac{1}{\cos(0)}=\frac{1}{1}=1$$

II.6 LÍMITES QUE TIENDEN A INFINITO

Dada una función f definida en un intervalo (a,∞). Entonces el

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como se quiera, si se elige una x suficientemente grande. Esta expresión se lee como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es L".

Similarmente, la expresión $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=L$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como se quiera, si se elige una x negativa suficientemente grande y se lee como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es L".

Para saber si existe el límite de una función cuando x tiende a infinito es necesario analizar su comportamiento particular. Por su importancia, los límites de este tipo que revisten más interés de estudio son los de las funciones algebraicas y de las racionales.

En el primer caso, todos los límites de funciones algebraicas que tienden a infinito (o a menos infinito) no existen.

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x)=(\infty)^2-5(\infty)=\infty-\infty=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(4x^2+3x-6)=4(\infty)^2+3(\infty)-6=\infty+\infty-6=\infty$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-7x^3-3x^2+2x-6)=-7(-\infty)^3-3(-\infty)^2+2(-\infty)+8=\infty-\infty-\infty+8=\infty$

En el segundo caso, para calcular límites de funciones racionales, normalmente el procedimiento consiste en dividir cada término de la función por el término en x que posee el mayor exponente, se reduce aplicando leyes de exponentes y se toma el límite, considerando que: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x-6}{5x^2-2x+7}=\frac{9(\infty)-6}{5(\infty)^2-2(\infty)+7}=\frac{\infty-6}{\infty-\infty+7}=\frac{\infty}{\infty}$

Esta es una forma indeterminada, sin embargo, si se divide todo entre x^2 se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x-6}{5x^2-2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}-\frac{6}{x^2}}{5-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{0-0}{5-0+0}=\frac{0}{5}=0$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{18x^3+7x+1}{2x^2-6x^3-4}=\frac{18(-\infty)^3+7(-\infty)+1}{2(-\infty)^2-6(-\infty)^3-4}=\frac{-\infty-\infty+1}{\infty+\infty-4}=\frac{\infty}{\infty}$

Es una indeterminación, pero si se divide todo entre x^3 se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{18x^3+7x+1}{2x^2-6x^3-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{18x^3}{x^3}+\frac{7x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{6x^3}{x^3}-\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{18+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x}-6-\frac{4}{x^3}}=\frac{18+0-0}{0-6-0}=\frac{18}{-6}=-3$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x^2-8x}{3x^2-2x+10}=\frac{5(\infty)^4+2(\infty)^2-8(\infty)}{3(\infty)^2-2(\infty)+10}=\frac{\infty+\infty-\infty}{\infty-\infty+10}=\frac{\infty}{\infty}$

Esta es una forma indeterminada, sin embargo, si se divide todo entre x^4 se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x^2-8x}{3x^2-2x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^4}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}-\frac{8x}{x^4}}{\frac{3x^2}{x^4}-\frac{2x}{x^4}+\frac{10}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{10}{x^4}}=\frac{5+0-0}{0-0+0}=\frac{5}{0}\quad (\textit{no existe})$$

En general, para calcular límites que tienden a infinito (o a menos infinito), de las funciones racionales de la forma:

$$p(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_0}$$

existen tres casos posibles:

1) Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador y el límite de la función es cero.

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=0,\quad \text{si}\quad n<m$$

2) Si los grados de los polinomios en el numerador y el denominador son iguales, el límite es el cociente del coeficiente del exponente mayor del numerador entre el coeficiente del exponente mayor del denominador.

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{si} \quad n = m$$

3) Si el grado del numerador es mayor que el del denominador, el límite no existe.

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \quad (no\ existe), \quad \text{si} \quad n > m$$

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{19+5x+8x^2+13x^5}{14x^6+17x^4+8x^5+12x}$

Como $n < m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^5-18x+13x^2}{-11-15x^3+6x^4-2x^2}$

Como $n > m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \quad (no\ existe)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-9x-12x^3}{4x-14-6x^3-2x^2}$

Como $n = m = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \dfrac{-12}{-6} = 2$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3-11x+x^5}{5+x^3+7x-12x^2}$

Como $n > m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \quad (no\ existe)$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+20x^4-2x^2}{7x^2-1-9x^3-4x^4}$

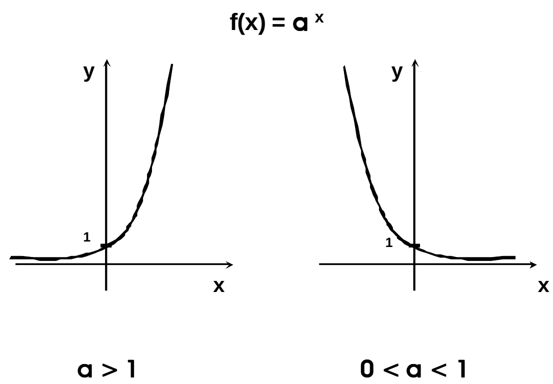
Como $n = m = 4$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \dfrac{20}{-4} = -5$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x+5x^4-x^2+48}{11x^3+x^6+3-4x^2-10x}$

Como $n < m$, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = 0$

II.7 LÍMITES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Una *función exponencial* es una función de la forma: $f(x) = a^x$ donde a es un número real positivo y $a \neq 1$.
El comportamiento general de esta función se puede apreciar en las siguientes gráficas:



Sus características son:

- Dominio = (-∞, ∞)
- Rango = (0, ∞)
- La asíntota horizontal es el eje x
- Siempre corta al eje y en el punto $P(0,1)$
- Siempre es creciente si $a > 1$ y siempre es decreciente si $0 < a < 1$
- La función crece más rápido si la base es más grande y decrece más rápido si la base es más pequeña.

De acuerdo a lo anterior, se puede inferir que:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty, \qquad a > 1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad a > 1$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0, \qquad 0 < a < 1$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty, \qquad 0 < a < 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$

Ejemplo.

Evaluar numéricamente el límite: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Solución.
Tabulando:

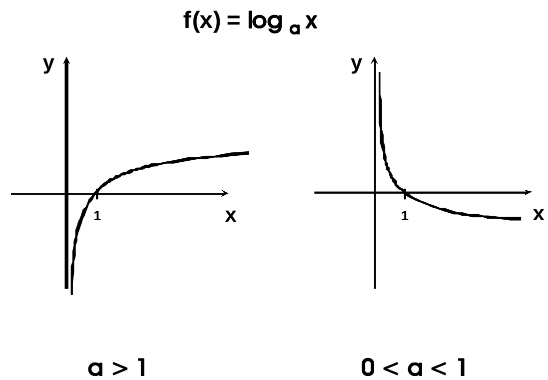
x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
3	1.587401
2	1.732050
1	2
0.5	2.25
0.1	2.593742
0.01	2.704813
0.001	2.716923
0.0001	2.718145
0.00001	2.718268

Como se puede advertir, el límite tiende a un número cercano a 2.71. Dicho límite es el número irracional conocido como e y tiene el valor aproximado de $e \approx 2.71828182846\cdots$.

Se llama *función logarítmica* a la función real de variable real :

$$y = \log_a f(x)$$

El comportamiento general de esta función se puede apreciar en las siguientes gráficas:



La función logarítmica es una aplicación biyectiva definida de **R**$^+$ en **R** y sus características son:

- Dominio = (0, ∞)
- Rango = (-∞, ∞)
- La asíntota vertical es el eje y
- Siempre corta al eje x en el punto $P(1,0)$
- Siempre es creciente si $a > 1$ y siempre es decreciente si $0 < a < 1$
- La función crece más rápido si la base es más pequeña (cuando $a > 1$) y decrece más rápido si la base es más grande (cuando $0 < a < 1$)
- La función logarítmica de base a es la recíproca de la función exponencial de base a

Por lo anterior, se puede inferir que:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty, \qquad a > 1$
2. $\lim\limits_{x\to \infty} \log_a x = \infty, \qquad a > 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = \infty, \qquad 0 < a < 1$
4. $\lim\limits_{x\to \infty} \log_a x = -\infty, \qquad 0 < a < 1$

Ejemplo.

Evaluar numéricamente el límite: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_{10} x}{x}$

Solución.

Tabulando:

x	$\frac{\log_{10} x}{x}$
5	0.139794
10	0.100000
50	0.033979
100	0.020000
1000	0.003000
10,000	0.000400
100,000	0.000050
1'000,000	0.000006

x es más grande que su logaritmo, así que a medida que x crece, la fracción va disminuyendo. Por lo tanto: $\lim_{x\to\infty}\frac{\log_{10} x}{x}=0$

II.8 CONTINUIDAD

Una función es continua en $x=a$ cuando no hay interrupción en la gráfica de f en a. Su gráfica no aparece con huecos o saltos en f. Esto es, una función es continua si su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

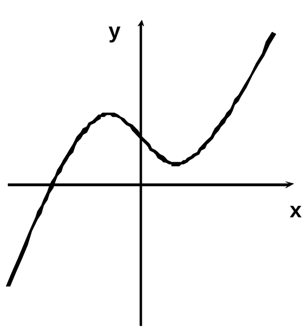
Formalmente, una función f es *continua* en un punto $x=a$ si está definida en ese punto, y además:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

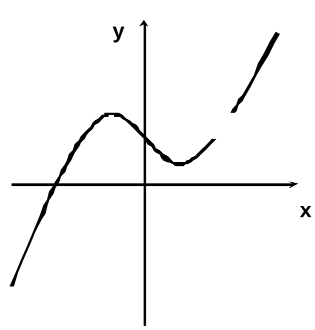
En caso de no cumplir con la condición se dice que la función es *discontinua*.

Una función f es *continua en un intervalo* cuando es continua en todos los puntos de ese intervalo.

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$



Función continua



Función discontinua

Ejemplos.

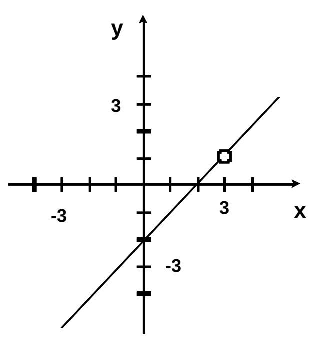
1) La función $f(x) = 3x^2 - 5$ es continua en el punto $x = 1$ porque $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3(1)^2 - 5 = 3 - 5 = -2$.

2) La función $f(x) = \sqrt{9sen\, x - 5}$ es continua en el punto $x = \pi$ porque $\lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \sqrt{9sen(\pi) - 5} = \sqrt{9(1) - 5} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$.

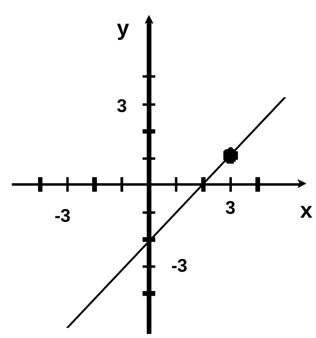
3) La función $f(x) = \frac{1}{x - 4}$ es discontinua porque en el punto $x = 4$ no está definida y porque el límite no existe.

4) La función $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ es discontinua porque en el punto $x = 3$ no está definida, aunque el límite exista: $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x - 2) = 3 - 2 = 1$.

Nótese como en este último ejemplo la función original puede reescribirse como: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = x - 2$, la cual es continua. En estos casos la discontinuidad recibe el nombre de *evitable*. Las gráficas de ambas funciones es la misma a excepción de que en la primera tiene una especie de orificio en el punto $x = 3$ y en y la segunda no. Evitar la discontinuidad consiste en rellenar dicho orificio tal y como se ve en la siguiente figura:



Función discontinua en x = 3



Función continua en x = 3

Las discontinuidades se clasifican en: evitables y no evitables. Una discontinuidad en $x = a$ es evitable si f se puede redefinir en ese punto.

Los siguientes tipos de funciones son continuas <u>en sus dominios</u>:

- Polinomiales
- Racionales
- De raíz
- Trigonométricas
- Trigonométricas inversas
- Exponenciales
- Logarítmicas

Sean f y g dos funciones continuas en $x=a$, entonces las siguientes operaciones de funciones también son continuas en $x=a$:

$f+g$

$f-g$

$f\cdot g$

$\frac{f}{g}$ si $g(a)\neq 0$

$c\cdot f$, siendo c una constante

$f\circ g(x)=f(g(x))$, si f es continua en $g(a)$.

Ejemplo.
Determinar si las siguientes funciones son continuas en el punto dado:

1) $f(x)=8x^3-3x^2-6x+7$ en el punto $x=2$

Solución:

$$f(2)=8(2)^3-3(2)^2-6(2)+7=8(8)-3(4)-12+7=64-12-12+7=47$$

$$\lim_{x\to 2}\left(8x^3-3x^2-6x+7\right)=8(2)^3-3(2)^2-6(2)+7=8(8)-3(4)-12+7=64-12-12+7=47$$

como $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$, la función sí es continua en $x=2$ (lo cual era de esperarse ya que es una función polinomial).

2) $f(x)=\sqrt{2x-10}$ en el punto $x=3$

Solución:

$f(2)=\sqrt{2(3)-10}=\sqrt{6-10}=\sqrt{-4}$ como la función no está definida en ese punto la función no es continua (no tiene caso calcular el límite porque no hay forma de eliminar la inexistencia).

3) $f(x)=\dfrac{x^2-49}{x+7}$ en el punto $x=-7$

Solución:

El valor $x=-7$ anula al denominador, sin embargo, la función puede rescribirse como:

$$f(x)=\frac{x^2-49}{x+7}=\frac{(x+7)(x-7)}{x+7}=x-7$$

$$f(7)=-7-7=-14$$

$$\lim_{x\to -7}\frac{x^2-49}{x+7}=\lim_{x\to -7}\frac{(x+7)(x-7)}{x+7}=\lim_{x\to -7}(x-7)=-7-7=-14$$

por lo tanto, la función es discontinua en el punto $x=-7$ pero es evitable.

4) $f(x)=\dfrac{x^2}{12+3x}$ en el punto $x=-4$

Solución:

$f(2)=\dfrac{(-4)^2}{12+3(-4)}=\dfrac{16}{0}$ como la función no está definida en ese punto la función no es continua (no tiene caso calcular el límite porque no hay forma de eliminar la discontinuidad).

5) $f(x)=\log_{10} x^2$ en el punto $x=10$

Solución:

$f(10)=\log_{10}(10)^2=\log_{10}(100)=2$

$\lim\limits_{x\to 10}\log_{10} x^2=\log_{10}(10)^2=\log_{10}(100)=2$ como $\lim\limits_{x\to 10} f(x)=f(10)$, la función sí es continua en $x=10$ (lo cual era de esperarse ya que es una función logarítmica).

6) $f(x)=\dfrac{8x^5-24x^4}{4x}$ en el punto $x=0$

Solución:

El valor $x=0$ anula al denominador, sin embargo, la función puede rescribirse como:

$$f(x)=\frac{4x\left(2x^4-6x^3\right)}{4x}=2x^4-6x^3$$

$$f(0)=2(0)^4-6(0)^3=0-0=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x^5-24x^4}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\left(2x^4-6x^3\right)}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(2x^4-6x^3\right)=2(0)^4-6(0)^3=0-0=0$$

por lo tanto, la función es discontinua en el punto $x=0$ pero es evitable.

Ejemplos.

Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\dfrac{5x-2}{3x-18}$

Solución.

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en el punto $x=6$ (ya que ahí se anula el denominador). Además, no es evitable.

2) $f(x)=\dfrac{10x^3+5}{9x-x^2}$

Solución.

$$f(x)=\frac{10x^3+5}{x(9-x)}$$

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en los puntos $x=0$ y $x=9$ (ya que ahí se anula el denominador). Además, no son evitables.

3) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2-7x+10}$

Solución.

$$f(x)=\frac{(x+5)(x-5)}{(x-2)(x-5)}=\frac{x+5}{x-2}$$

Hay continuidad en todo el intervalo $(-\infty,\infty)$ excepto en los puntos $x=2$ y $x=5$ (ya que ahí se anula el denominador). Sin embargo, en $x=5$ es evitable.

4) $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 4 \\ 24-2x & x>4 \end{cases}$

Solución.

$$f(4)=(4)^2=16$$
$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4} x^2=(4)^2=16$$
$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4}(24-2x)=24-2(4)=24-8=16$$

como $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)$ entonces el $\lim_{x\to 4} f(x)=16$

Por lo tanto, hay continuidad en el intervalo $[0,\infty)$.