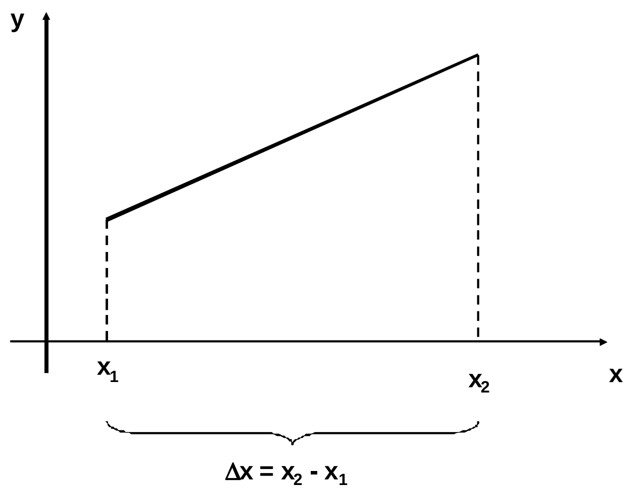
LA DERIVADA

UNIDAD III

III.1 INCREMENTOS

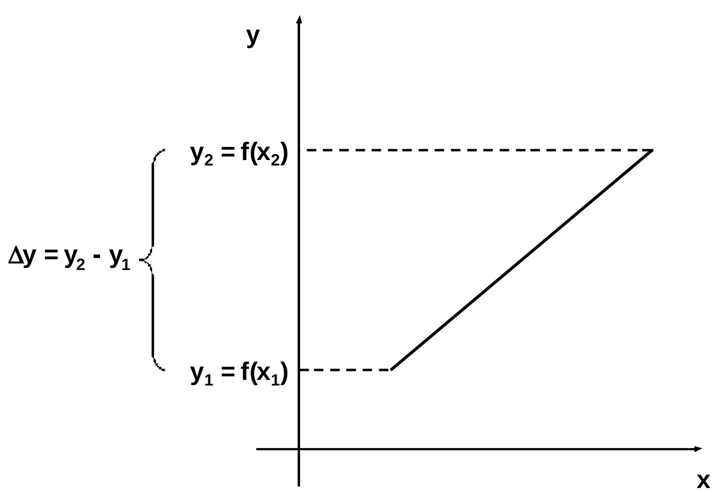
Se define como *incremento de la variable* x al aumento o disminución que experimenta, desde un valor x_1 a otro x_2, en su campo de variación. Se denota por Δx. Por tanto:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$



De forma análoga, el *incremento de la variable* y es el aumento o disminución que experimenta, desde un valor y_1 a otro y_2, en su campo de variación. Se denota por Δy, esto es:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$



Por definición, los incrementos pueden ser:
$\Delta > 0$ si el valor final es mayor que el inicial
$\Delta < 0$ si el valor final es menor que el inicial
$\Delta = 0$ si el valor final es igual que el inicial

Ejemplos.

1) Sea $y = 4x^2 - 3$, obtener Δx y Δy si x pasa de 2 a 2.5
Solución:
$x_1 = 2, \quad x_2 = 2.5$
$\Delta x = 2.5 - 2 = 0.5$
$y_1 = f(x_1) = f(2) = 4(2)^2 - 3 = 16 - 3 = 13$
$y_2 = f(x_2) = f(2.5) = 4(2.5)^2 - 3 = 25 - 3 = 22$
$\Delta y = y_2 - y_1$
$\Delta y = 22 - 13 = 9$

2) Sea $y = 6x^3 - 2x - 10$, obtener Δx y Δy si x pasa de 3 a 3.02
Solución:
$x_1 = 3, \quad x_2 = 3.02$
$\Delta x = 3.04 - 3 = 0.02$
$y_1 = f(x_1) = f(3) = 6(3)^3 - 2(3) - 10 = 162 - 6 - 10 = 146$
$y_2 = f(x_2) = f(3.02) = 6(3.02)^3 - 2(3.02) - 10 = 165.2616 - 6.04 - 10 = 149.2216$
$\Delta y = y_2 - y_1$
$\Delta y = 149.2216 - 146 = 3.2216$

Como puede observarse, y_2 es el valor final de la variable dependiente cuando a x se le asigna el valor x_2. De la misma forma, y_1 es el valor inicial de la variable dependiente cuando a x se le asigna el valor inicial x_1. Esto es:

$$y_1 = f(x_1)$$
$$y_2 = f(x_2)$$

Ahora, de $\Delta x = x_2 - x_1$, se despeja x_2:
$x_2 = x_1 + \Delta x$
por lo que y_2 es:
$f(x_2) = f(x_1 + \Delta x)$
por lo tanto, sustituyendo en $\Delta y = y_2 - y_1$:
$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

Esto significa que al darle un incremento a x en el punto x_1 le corresponde a y un incremento:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

Ahora, si a la expresión anterior se divide por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

se obtiene el *cociente de incrementos*.

III.2 DEFINICIÓN DE DERIVADA

Se define como derivada de una función $y=f(x)$ con respecto a x en un punto x_1, al límite, si existe, del cociente de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero.

Esto significa que la derivada es el límite del cociente del incremento de la variable dependiente, entre el incremento de la variable independiente, cuando éste tiende a cero, y se denota por:

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

Las notaciones más comunes de la derivada de la función $y=f(x)$ con respecto a x son:

y'	ó	$f'(x)$	Notación de Lagrange
$\frac{dy}{dx}$	ó	$\frac{df(x)}{dx}$	Notación de Leibniz
$D_x y$	ó	$D_x f(x)$	Notación de Cauchy
$\dot{y}$	ó	$\dot{f}(x)$	Notación de Newton

La más usada es la notación de Leibniz[1]. Las distintas partes de estas expresión carecen de todo significado cuando se consideran separadamente. Las d no son números, no pueden simplificarse, y la expresión completa no es el cociente de otros dos números "dy" y "dx"'.

Leibniz llegó a este símbolo a través de su noción intuitiva de la derivada, que él consideraba no como el límite de los cocientes $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$, sino como el "valor" de este cociente cuando Δx es un número *infinitamente pequeño*. Esta cantidad "infinitamente pequeña" fue designada por dx y la correspondiente diferencia "infinitamente pequeña" $f(x+\Delta x)-f(x)$ por $df(x)$.

III.3 MÉTODO DE LOS CUATRO PASOS

Para hallar la derivada de una función se sigue un procedimiento conocido como *método de los cuatro pasos* que consiste en:

1. A la función en x se le incrementa en Δx: $f(x+\Delta x)$
2. A lo obtenido, se le resta la función original, es decir $f(x+\Delta x)-f(x)$

[1] Leibniz es generalmente considerado como el codescubridor independiente del cálculo infinitesimal (junto con Newton).

3. Se divide todo por Δx : $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

4. Se toma el límite cuando Δx tiende a cero: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, y si existe este límite, es su derivada.

Ejemplos.
Aplicando el método de los cuatro pasos, obtener la derivada de las siguientes funciones.

1) $y=5x-3$
Solución:
$f(x)=5x-3$
1er paso: $f(x+\Delta x)=5(x+\Delta x)-3$
2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=5(x+\Delta x)-3-(5x-3)$
$=5x+5\Delta x-3-5x+3=5\Delta x$
3er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{5\Delta x}{\Delta x}=5$
4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}5=5$
$\therefore\quad f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=5$

2) $y=4x^2-7x+6$
Solución:
$f(x)=4x^2-7x+6$
1er paso: $f(x+\Delta x)=4(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)+6$
$=4\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)-7x-7\Delta x+6=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7x-7\Delta x+6$
2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7x-7\Delta x+6-\left(4x^2-7x+6\right)$
$=4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7x-7\Delta x+6-4x^2+7x-6$
$=8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7\Delta x$
3er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{8x\Delta x+4(\Delta x)^2-7\Delta x}{\Delta x}=8x+4\Delta x-7$
4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(8x+4\Delta x-7)=8x-7$
$\therefore\quad f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=8x-7$

3) $y=2x^3-5x-11$
Solución:
$f(x)=2x^3-5x-11$
1er paso: $f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^3-5(x+\Delta x)-11$
$=2\left(x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\right)-5x-5\Delta x-11=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5x-5\Delta x-11$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5x-5\Delta x-11-\left(2x^3-5x-11\right)$

$=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5x-5\Delta x-11-2x^3+5x+11=6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5\Delta x$

3^er^ paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-5\Delta x}{\Delta x}=6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2-5$

4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2-5\right)=6x^2-5$

$\therefore \quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=6x^2-5$

4) $y=\frac{7}{x^2}$

Solución:

$f(x)=\frac{7}{x^2}$

1^er^ paso: $f(x+\Delta x)=\frac{7}{(x+\Delta x)^2}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{7}{(x+\Delta x)^2}-\frac{7}{x^2}$, simplificando las fracciones:

$$=\frac{7x^2-7(x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{7x^2-7\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{7x^2-7x^2-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}$$

$$=\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}$$

3^er^ paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}}{\Delta x}=\frac{-14x\Delta x-7(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2\Delta x}=\frac{-14x-7\Delta x}{(x+\Delta x)^2x^2}$

4º paso: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-14x-7\Delta x}{(x+\Delta x)^2x^2}=\frac{-14x}{x^2x^2}=\frac{-14x}{x^4}=-\frac{14}{x^3}$

$\therefore \quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{14}{x^3}$

5) $y=\sqrt{3x}$

Solución:

$f(x)=\sqrt{3x}$

1^er^ paso: $f(x+\Delta x)=\sqrt{3(x+\Delta x)}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{3(x+\Delta x)}-\sqrt{3x}$

multiplicando arriba y abajo por el conjugado del binomio, se tiene:

$$=\left(\sqrt{3x+3\Delta x}-\sqrt{3x}\right)\cdot\frac{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\frac{3x+3\Delta x-3x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\frac{3\Delta x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}$$

3^er^ paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{3\Delta x}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}}{\Delta x}=\dfrac{3\Delta x}{\left(\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}\right)\Delta x}=\dfrac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}$

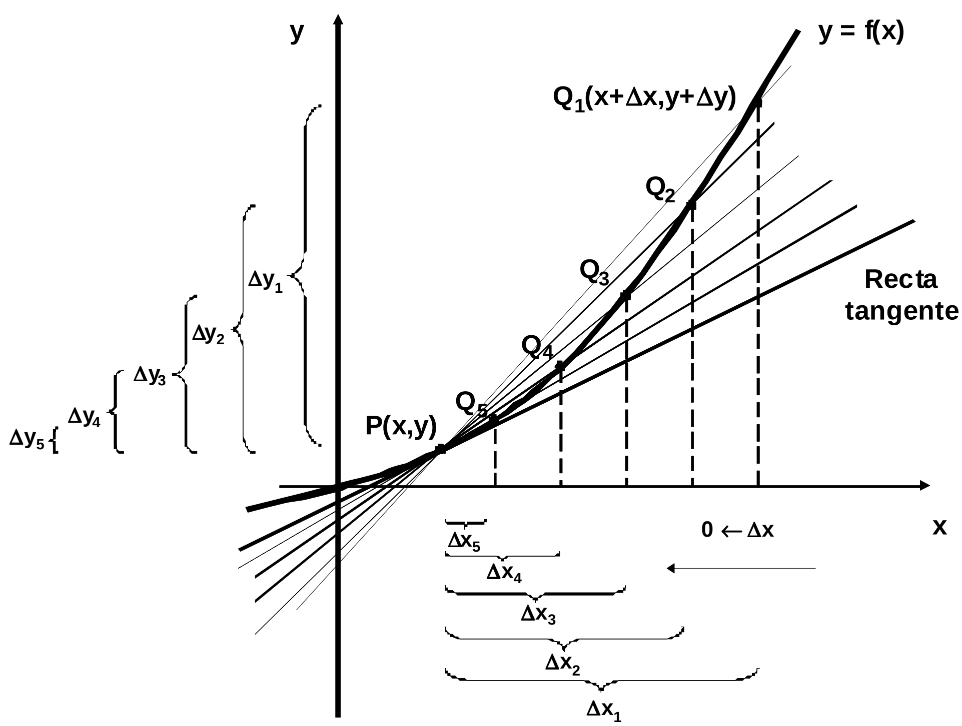
4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x}+\sqrt{3x}}=\dfrac{3}{\sqrt{3x}+\sqrt{3x}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

$\therefore \quad f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

III.4 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Sea una función $y=f(x)$. Si se toma un punto cualquiera $P(x,y)$ y se efectúa un incremento cualquiera Δx_1 se obtiene su respectivo incremento Δy_1 en el punto $Q_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. La razón $\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ representa la pendiente del segmento $\overline{PQ_1}$.

Ahora, si P permanece fijo y Δx es cada vez más pequeño, lo que sucede es que el punto Q se mueve sobre la curva acercándose a P. Cada vez que disminuye Δx, la recta $\overline{PQ_1}$ gira en torno a P hasta que llega a su posición límite que es la tangente a la curva en el punto P. Por lo tanto el $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ es la pendiente de la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto P.



La interpretación geométrica de la derivada es la pendiente de la recta tangente en el punto $P(x,y)$.

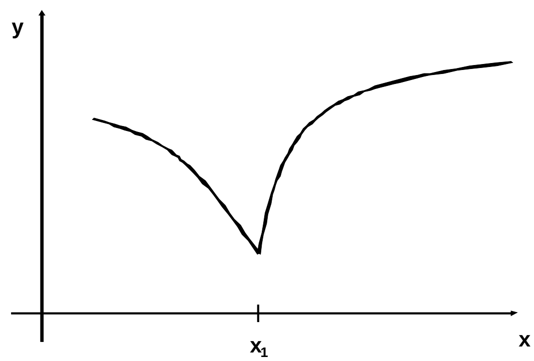
III.5 DERIVABILIDAD DE FUNCIONES

Una función $f(x)$ es derivable en el punto x_1 si $f'(a)$ existe. Por su parte, una función es derivable en un intervalo abierto (a,b) si es derivable en cualquier punto del intervalo.

Es importante resaltar que: si $f(x)$ es derivable en un punto x_1, entonces $f(x)$ es continua en x_1, sin embargo, el caso inverso, *no necesariamente es cierto* porque hay funciones que son continuas pero no son derivables.

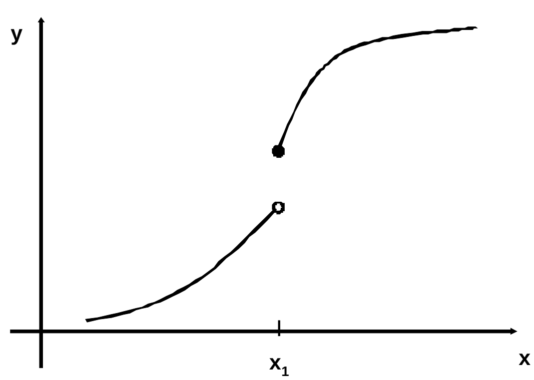
En general, si la gráfica de una función presenta cualquiera de los siguientes tres casos, entonces una función no es derivable.

1. Si posee “picos” ya que la función no posee tangente en esos puntos y no es derivable allí debido a que al calcular $f'(x_1)$ se encuentra que los límites laterales son diferentes.



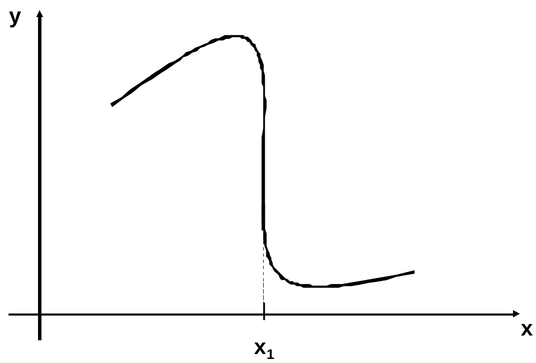
Un “pico”

2. Si una función $f(x)$ no es continua en x_1 entonces no es derivable en ese punto, por lo tanto, en cualquier discontinuidad, la función deja de ser derivable.



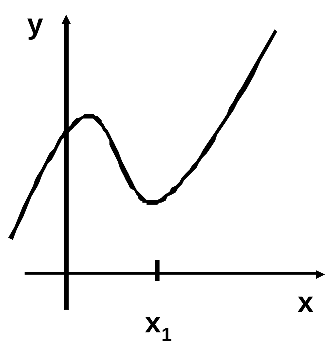
Discontinuidad

3. Si la curva tiene una recta tangente vertical cuando $x = x_1$. Esto es: $f(x)$ es continua en x_1 y $\lim_{x \to x_1} \left| f'(x_1) \right| = \infty$, lo que significa que las tangentes se vuelven cada vez más pronunciadas.

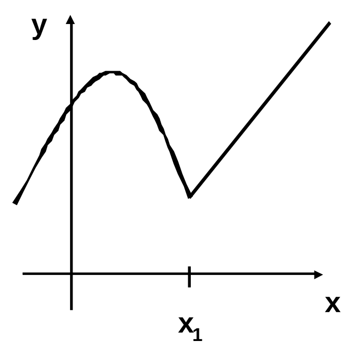


Tangente vertical

A pesar de que la gráfica tome la apariencia de una recta, mientras no presente un cambio brusco en forma de esquina, entonces la función es derivable. Las siguientes gráficas muestran esto en un punto $x = x_1$:



f(x) es derivable en x = x_1



f(x) no es derivable en x = x_1

Ejemplo.

Determinar los puntos en que la función $f(x) = |x|$ es derivable.

Solución:

Como el valor absoluto de x presenta tres posibles valores, se analiza por separado:

- Si $x > 0$, se tiene: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$

Por tanto, la función es derivable para $x > 0$.

- Si $x < 0$, se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x+\Delta x) - (-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-1) = -1$$

Por tanto, la función es derivable para $x < 0$.

- Si $x = 0$, se tiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} \quad \text{(si existe)}$$

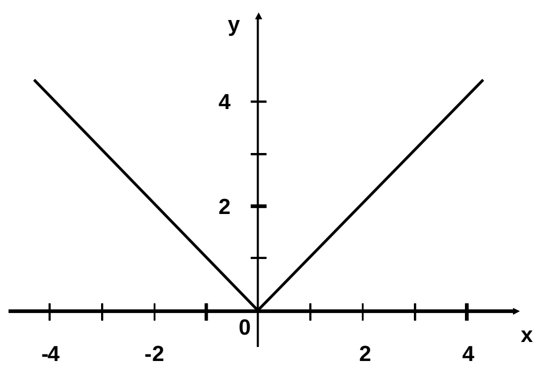
Se comparan los límites laterales por separado:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que $\lim_{\Delta x \to 0^+} f(0) \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} f(0)$, no existe $f'(0)$. Por lo tanto $f(x)$ es derivable para toda x excepto en $x = 0$.

En la gráfica siguiente se aprecia como la función no posee tangente en $x = 0$.



y = f(x) = |x|

III.6 FÓRMULAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

Sean las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$, tal que se forme una composición de funciones que cumpla con: $y = f(g(x))$.

La derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función compuesta se obtiene por medio de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Expresión conocida también como la *regla de la cadena*.

La regla de la cadena es muy útil en cambios de variable a fin de simplificar la derivación de funciones: a una parte de la función se le denota como u, se deriva la función respecto a esta variable, se le multiplica por $\frac{du}{dx}$ y finalmente se sustituye u por la parte correspondiente de la función original en x.

Sean u, v, w tres funciones de x, es decir, $u = f(x),\ v = f(x),\ w = f(x)$ y c una constante. Las once primeras formulas básicas de derivación, considerando la regla de la cadena, son:

1) $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Demostración:

$f(x) = c$

1er paso: $f(x+\Delta x) = c$

2º paso: $f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(c) = 0$

La derivada de una constante siempre es cero.

2) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

Demostración:

$f(x) = x$

1er paso: $f(x+\Delta x) = x + \Delta x$

2º paso: $f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x) - x = x + \Delta x - x = \Delta x$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1) = 1$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1$

La derivada de x, respecto a si misma, es uno.

3) $\frac{d}{dx}(c \cdot x) = c$

Demostración:

$f(x) = c \cdot x$

1er paso: $f(x+\Delta x) = c(x + \Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x) - f(x) = c(x+\Delta x) - cx = cx + c\Delta x - cx = c\Delta x$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c\Delta x}{\Delta x} = c$

4º paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (c) = c$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(c \cdot x) = c$

La derivada de una función por una constante es igual a la constante.

4) $\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$

Demostración:

$f(x)=u+v+w$

1er paso: $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)+w(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)+w(x+\Delta x)-u(x)-v(x)-w(x)$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)+w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$

$$=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad f'(u+v+w)=\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$$

La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de esas funciones.

5) $\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$

Demostración:

$f(x)=u\cdot v$

1er paso: $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$

restando y sumando: $v(x)\cdot u(x+\Delta x)$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-v(x)\cdot u(x+\Delta x)+v(x)\cdot u(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]+v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}+\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to o}\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to o}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad f'(u\cdot v)=\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.

6) $\frac{d}{dx}(u\cdot v\cdot w)=u\cdot v\cdot\frac{dw}{dx}+u\cdot w\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot w\cdot\frac{du}{dx}$

Demostración:

$f(x)=u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$

1^er paso: $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$

3^er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)}{\Delta x}$

restando y sumando: $u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x)$ y $u(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot w(x)$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x)}{\Delta x}$$
$$+\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot w(x)-u(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot w(x)}{\Delta x}$$
$$+\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot w(x)-u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}+u(x+\Delta x)\cdot w(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$+v(x)\cdot w(x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot w(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}v(x)\cdot w(x)\cdot\lim_{\Delta x\to o}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore\quad f'(u\cdot v)=\frac{d}{dx}(u\cdot v\cdot w)=u\cdot v\cdot\frac{dw}{dx}+u\cdot w\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot w\cdot\frac{du}{dx}$$

La derivada de un producto de tres funciones es igual al producto de la primera y la segunda funciones por la derivada de la tercera, más el producto de la primera y la tercera funciones por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda y la tercera funciones por la derivada de la primera.

7) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{c}\right)=\frac{1}{c}\qquad c\neq 0$

Demostración:

$f(x)=\frac{x}{c}$

1^er paso: $f(x+\Delta x)=\frac{(x+\Delta x)}{c}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{(x+\Delta x)}{c}-\frac{x}{c}=\frac{x}{c}+\frac{\Delta x}{c}-\frac{x}{c}=\frac{\Delta x}{c}$

3er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\frac{\Delta x}{c}}{\Delta x}=\dfrac{1}{c}$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{1}{c}$

$\therefore \quad f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{c}\right)=\dfrac{1}{c} \qquad c\neq 0$

La derivada del cociente de la función identidad sobre una constante es igual al inverso multiplicativo de la constante.

8) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{x}\right)=c\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{c}{x^2}$

Demostración:

$f(x)=\dfrac{c}{x}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\dfrac{c}{x+\Delta x}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{c}{x+\Delta x}-\dfrac{c}{x}=\dfrac{cx-c(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\dfrac{cx-cx-c\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\dfrac{c\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

3er paso: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{-\frac{c\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=-\dfrac{c\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x}=-\dfrac{c}{x(x+\Delta x)}$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{c}{x(x+\Delta x)}\right)=-\dfrac{c}{x^2}$

$\therefore \quad f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{x}\right)=-\dfrac{c}{x^2}$

La derivada del cociente de una constante sobre la función identidad es igual a la constante dividida por el cuadrado de la función afectado todo por un signo negativo.

9) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}, \qquad v\neq 0$

Demostración:

$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

1er paso: $f(x+\Delta x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$

restando y sumando: $u(x)\cdot v(x)$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot v(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot\Delta x}$$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)\cdot\Delta x}$

$$=\frac{v(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-u(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

4º paso: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{v(x)\cdot u'(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2};\qquad v\neq 0$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

10) $\frac{d}{dx}x^n=n\cdot x^{n-1}$

Demostración:

$f(x)=x^n$

1er paso: $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^n$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\frac{\left[x^n+\frac{nx^{n-1}\Delta x}{1!}+\frac{n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^3}{3!}+\cdots+(\Delta x)^n\right]-x^n}{\Delta x}$$

$$=\frac{nx^{n-1}}{1!}+\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^2}{3!}+\cdots(\Delta x)^{n-1}$$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{nx^{n-1}}{1!}+\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^2}{3!}+\cdots(\Delta x)^{n-1}\right]=n\cdot x^{n-1}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=n\cdot x^{n-1}$$

La derivada de una potencia de x es igual al exponente multiplicado por x elevado al exponente menos uno.

En resumen y aplicando la regla de la cadena, en donde $u=f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx}(c)=0$

2) $\frac{d}{dx}(x)=1$

3) $\frac{d}{dx}(c\cdot u)=c\cdot\frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}(u\cdot v\cdot w)=u\cdot v\cdot\frac{dw}{dx}+u\cdot w\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot w\cdot\frac{du}{dx}$

7) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{du}{dx} \qquad c\neq 0$

8) $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right)=c\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{c}{u^2}\cdot\frac{du}{dx}$

9) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}, \qquad v\neq 0$

10) $\frac{d}{dx}u^n=n\cdot u^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$

Ejemplos.
Aplicando las fórmulas de derivación, obtener la derivada de las siguientes funciones:

1) $y=4$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

2) $y=7x$

$$\frac{dy}{dx}=7$$

3) $y=4x^3$

$$\frac{dy}{dx}=12x^2$$

4) $y=8x^2-5x+6$

$$\frac{dy}{dx}=16x-5$$

5) $y=x^3-9x^2-11x+1$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-18x-11$$

6) $y=\left(6x^2-7x-2\right)^5$

Aplicando la regla de la cadena:

$$u=6x^2-7x-2$$

$$y=u^5$$

$$\frac{dy}{du}=5u^4$$

$$\frac{du}{dx}=12x-7$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=5\left(6x^2-7x-2\right)^4(12x-7)$$

para fines prácticos, se deriva a la función del paréntesis en su conjunto (u) y se multiplica por la derivada del contenido del paréntesis:

7) $y=\left(8x^4-5x^2-13x\right)^3$

$$\frac{dy}{dx}=3\left(8x^4-5x^2-13x\right)^2\left(32x^3-10x-13\right)$$

8) $y=\left(7x^3-2x^4-5x-6\right)^5$

$$\frac{dy}{dx}=5\left(7x^3-2x^4-5x-6\right)^4\left(21x^2-8x^3-5\right)$$

9) $y=\left(9x^2-12x+8\right)\left(-5x^2-11x+4x^3-13\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(9x^2-12x+8\right)\left(-10x-11+12x^2\right)+\left(-5x^2-11x+4x^3-13\right)\left(18x-12\right)$$

10) $y=\left(10x^4-16x^3-8x^2+7x+5\right)\left(15x^2-6x+9\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(10x^4-16x^3-8x^2+7x+5\right)\left(30x-6\right)+\left(15x^2-6x+9\right)\left(40x^3-48x^2-16x+7\right)$$

11) $y=\left(11x^2-17x\right)\left(8x^3-9\right)\left(6x^4-4\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(11x^2-17x\right)\left(8x^3-9\right)\left(24x^3\right)+\left(11x^2-17x\right)\left(6x^4-4\right)\left(24x^2\right)+\left(8x^3-9\right)\left(6x^4-4\right)\left(22x-17\right)$$

12) $y=\left(3x^5-12x^4-5\right)\left(2x^2+1\right)\left(3x^3-16x^2\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(3x^5-12x^4-5\right)\left(2x^2+1\right)\left(9x^2-32x\right)+\left(3x^5-12x^4-5\right)\left(3x^3-16x^2\right)\left(4x\right)$$
$$+\left(2x^2+1\right)\left(3x^3-16x^2\right)\left(15x^4-48x^3\right)$$

13) $y=\left(4x^2-9x^3\right)^5\left(6x^8+14x\right)^7$

$$\frac{dy}{dx}=\left(4x^2-9x^3\right)^5 7\left(6x^8+14x\right)^6\left(48x^7+14\right)+\left(6x^8+14x\right)^7 5\left(4x^2-9x^3\right)^4\left(8x-27x^2\right)$$

14) $y=\dfrac{4x^2-x-11}{6}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x-1}{6}$$

15) $y=\dfrac{7\left(4x^3-2x^5-1\right)^3}{-9}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{21\left(4x^3-2x^5-1\right)^2\left(12x^2-10x^4\right)}{9}$$

16) $y=\sqrt{x}$

$$y=x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

17) $y=\sqrt[5]{x^3}$

$$y = x^{\frac{3}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

18) $y = \sqrt[4]{9x^6}$

$$y = \left(9x^6\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\left(9x^6\right)^{-\frac{3}{4}}54x^5 = \frac{54x^5}{4\left(9x^6\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{54x^5}{4\sqrt[4]{\left(9x^6\right)^3}}$$

19) $y = \sqrt[6]{2x^8}$

$$y = \left(2x^8\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}\left(2x^8\right)^{-\frac{5}{6}}16x^7 = \frac{16x^7}{6\left(2x^8\right)^{\frac{5}{6}}} = \frac{8x^7}{3\sqrt[6]{\left(2x^8\right)^5}}$$

20) $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}$

$$y = \frac{1}{x^{\frac{4}{7}}} = x^{-\frac{4}{7}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{7}x^{-\frac{11}{7}} = -\frac{4}{7x^{\frac{11}{7}}} = -\frac{4}{7\sqrt[7]{x^{11}}}$$

21) $y = \sqrt[3]{2x - 7x^4}$

$$y = \left(2x - 7x^4\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(2x - 7x^4\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2 - 28x^3\right) = \frac{2 - 28x^3}{3\left(2x - 7x^4\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 - 28x^3}{3\sqrt[3]{\left(2x - 7x^4\right)^2}}$$

22) $y = \frac{-41}{\sqrt[6]{5x^9 - 8x^2}}$

$$y = \frac{-41}{\left(5x^9 - 8x^2\right)^{\frac{1}{6}}} = -41\left(5x^9 - 8x^2\right)^{-\frac{1}{6}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{41}{6}\left(5x^9 - 8x^2\right)^{-\frac{7}{6}}\left(45x^8 - 16x\right) = \frac{41\left(45x^8 - 16x\right)}{6\left(5x^9 - 8x^2\right)^{\frac{7}{6}}} = \frac{41\left(45x^8 - 16x\right)}{6\sqrt[6]{\left(5x^9 - 8x^2\right)^7}}$$

23) $y = \frac{7x^2 - 3x - 2}{5x^2 - 11x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(5x^2 - 11x\right)\left(14x - 3\right) - \left(7x^2 - 3x - 2\right)\left(10x - 11\right)}{\left(5x^2 - 11x\right)^2}$$

24) $y=\frac{8x^4-13x^3+4}{7x^5+x-5x^6}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(7x^5+x-5x^6\right)\left(32x^3-39x^2\right)-\left(8x^4-13x^3+4\right)\left(35x^4+1-30x^5\right)}{\left(7x^5+x-5x^6\right)^2}$$

25) $y=\frac{\left(7x^3-11x-1\right)^3}{\sqrt[5]{x^8-2x}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)3\left(7x^3-11x-1\right)^2\left(21x^2-11\right)-\left(7x^3-11x-1\right)^3\frac{1}{5}\left(x^8-2x\right)^{-\frac{4}{5}}\left(8x^7-2\right)}{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)3\left(7x^3-11x-1\right)^2\left(21x^2-11\right)-\left(7x^3-11x-1\right)^3\frac{8x^7-2}{5\sqrt[5]{\left(x^8-2x\right)^4}}}{\left(\sqrt[5]{x^8-2x}\right)^2}$$

26) $y=\frac{17}{x^5-3}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{17\left(5x^4\right)}{\left(x^5-3\right)^2}$$

27) $y=\frac{6}{3x^6-5x^4}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{6\left(18x^5-20x^3\right)}{\left(3x^6-5x^4\right)^2}$$

28) $y=\frac{-14}{\left(8x^9-2x\right)^3}$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(-14)3\left(8x^9-2x\right)^2\left(72x^8-2\right)}{\left(8x^9-2x\right)^6}=\frac{14\left(72x^8-2\right)}{\left(8x^9-2x\right)^4}$$

29) $y=\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{7}{x^3}$

$$y=4x^{-1}-12x^{-2}+7x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx}=-4x^{-2}+24x^{-3}-21x^{-4}=-\frac{4}{x^2}+\frac{24}{x^3}-\frac{21}{x^4}$$

30) $y=\frac{6}{8x^7}+\frac{14}{5x^2}+9x-3x^2-\frac{15}{x^4}$

$$y=\frac{6}{8}x^{-7}+\frac{14}{5}x^{-2}+9x-3x^2-15x^{-4}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{42}{8}x^{-8}-\frac{28}{5}x^{-3}+9-6x+60x^{-5}=-\frac{42}{8x^8}-\frac{28}{5x^3}+9-6x+\frac{60}{x^5}$$

III.7 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $y = f(x)$ se conoce como primera derivada. Si ésta es a su vez una función derivable, su derivada se denomina *segunda derivada* de la función original, que se denota como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

La derivada de la segunda derivada, en caso de existir, se conoce como *tercera derivada* de la función:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$$

El proceso es sucesivo, y mientras exista, la *derivada enésima* es: $\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$.

Ejemplo.
Obtener la tercera derivada de la función $y = 2x^3 - 4x^2 - 5x - 12$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 8x - 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 12x - 8$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 12$$

Ejemplo.
Obtener la quinta derivada de la función $y = 2x^6 - 7x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 19$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^5 - 28x^3 + 15x^2 - 18x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 60x^4 - 84x^2 + 30x - 18$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 240x^3 - 168x + 30$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 720x^2 - 168$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = 1{,}440x$$

Ejemplo.

Obtener la séptima derivada de la función $y=\frac{5}{x}$

Solución:

$$y=5x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=-5x^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=10x^{-3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-30x^{-4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=120x^{-5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)=-600x^{-6}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)=3{,}600x^{-7}$$

$$\frac{d^7y}{dx^7}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^6y}{dx^6}\right)=25{,}200x^{-8}=\frac{25{,}200}{x^8}$$

III.8 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA IMPLÍCITA

Como se definió en el primer capítulo, una función expresada en forma implícita es de la forma $f(x,y)=0$. Para encontrar la derivada podría encontrarse su equivalente forma explícita y derivar. Sin embargo, como se sabe, no siempre es fácil despejar la variable dependiente, por lo que resulta necesario derivar en forma implícita.

En este sentido, la derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $f(x,y)=0$ se puede obtener efectuando el procedimiento que consta de los siguientes pasos:

1. Se expresa el operador $\frac{dy}{dx}$ a cada término de la función
2. Se deriva cada término, considerando la regla del producto (que en su caso aplique), y además, tomando en cuenta que la derivada de una función en y con respecto a x es igual a la derivada de esta función con respecto a y multiplicada por la derivada de y con respecto a x, esto es: $\frac{df(y)}{dx}=\frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$
3. Se acomodan en el primer miembro todos los términos que posean al operador $\frac{dy}{dx}$ y en el segundo miembro a los que no lo tengan, siempre respetando las reglas de los signos.

4. Se factoriza el operador $\frac{dy}{dx}$

5. Finalmente, se obtiene la derivada $\frac{dy}{dx}$ al despejarla de la expresión resultante.

Ejemplos.
Hallar la derivada de las siguientes funciones expresadas en forma implícita:

1) $4x^2y^3 + 5x^4 - 2y^5 - 12 = 0$
Solución:

$$\frac{d}{dx}4x^2y^3 + \frac{d}{dx}5x^4 - \frac{d}{dx}2y^5 - \frac{d}{dx}12 = \frac{d}{dx}0$$

$$4x^2 3y^2\frac{dy}{dx} + y^3 8x + 20x^3 - 10y^4\frac{dy}{dx} - 0 = 0$$

$$4x^2 3y^2\frac{dy}{dx} - 10y^4\frac{dy}{dx} = -8xy^3 - 20x^3$$

$$\frac{dy}{dx}\left(12x^2y^2 - 10y^4\right) = -8xy^3 - 20x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8xy^3 - 20x^3}{12x^2y^2 - 10y^4}$$

2) $3x^5 - 6x^4y^6 + 2y^3 + 8x^3 - 7y^5 + 15 = 0$
Solución:

$$\frac{d}{dx}3x^5 - \frac{d}{dx}6x^4y^6 + \frac{d}{dx}2y^3 + \frac{d}{dx}8x^3 - \frac{d}{dx}7y^5 + \frac{d}{dx}15 = \frac{d}{dx}0$$

$$15x^4 - \left(6x^4 6y^5\frac{dy}{dx} + y^6 24x^3\right) + 6y^2\frac{dy}{dx} + 24x^2 - 35y^4\frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

$$15x^4 - 36x^4y^5\frac{dy}{dx} - 24x^3y^6 + 6y^2\frac{dy}{dx} + 24x^2 - 35y^4\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-36x^4y^5\frac{dy}{dx} + 6y^2\frac{dy}{dx} - 35y^4\frac{dy}{dx} = -15x^4 + 24x^3y^6 - 24x^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4\right) = -15x^4 + 24x^3y^6 - 24x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-15x^4 + 24x^3y^6 - 24x^2}{-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4}$$

3) $8x^4 - 2x^3y^4 + 7x^7 - 10x^3y - 11 = 0$
Solución:

$$\frac{d}{dx}8x^4 - \frac{d}{dx}2x^3y^4 + \frac{d}{dx}7x^7 - \frac{d}{dx}10x^3y - \frac{d}{dx}11 = \frac{d}{dx}0$$

$$32x^3 - \left(2x^3 4y^3\frac{dy}{dx} + y^4 6x^2\right) + 49x^6 - \left(10x^3\frac{dy}{dx} + y30x^2\right) - 0 = 0$$

$$32x^3-8x^3y^3\frac{dy}{dx}-6x^2y^4+49x^6-10x^3\frac{dy}{dx}-30x^2y=0$$
$$-8x^3y^3\frac{dy}{dx}-10x^3\frac{dy}{dx}=-32x^3+6x^2y^4-49x^6+30x^2y$$
$$\frac{dy}{dx}\left(-8x^3y^3-10x^3\right)=-32x^3+6x^2y^4-49x^6+30x^2y$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-32x^3+6x^2y^4-49x^6+30x^2y}{-8x^3y^3-10x^3}$$

4) $6x^3-11x^2y^3+5y^4-8x^3y^5+5x-11=0$

Solución:
$$\frac{d}{dx}6x^3-\frac{d}{dx}11x^2y^3+\frac{d}{dx}5y^4-\frac{d}{dx}8x^3y^5+\frac{d}{dx}5x-\frac{d}{dx}11=\frac{d}{dx}0$$
$$18x^2-\left(11x^2 3y^2\frac{dy}{dx}+y^3 22x\right)+20y^3\frac{dy}{dx}-\left(8x^3 5y^4\frac{dy}{dx}+y^5 24x^2\right)+5-0=0$$
$$18x^2-33x^2y^2\frac{dy}{dx}-22xy^3+20y^3\frac{dy}{dx}-40x^3y^4\frac{dy}{dx}-24x^2y^5+5=0$$
$$-33x^2y^2\frac{dy}{dx}+20y^3\frac{dy}{dx}-40x^3y^4\frac{dy}{dx}=-18x^2+22xy^3+24x^2y^5-5$$
$$\frac{dy}{dx}\left(-33x^2y^2+20y^3-40x^3y^4\right)=-18x^2+22xy^3+24x^2y^5-5$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-18x^2+22xy^3+24x^2y^5-5}{-33x^2y^2+20y^3-40x^3y^4}$$

5) $8x^4+12x^3y^2+9y^2-10xy+6x-4=0$

Solución:
$$\frac{d}{dx}8x^4+\frac{d}{dx}12x^3y^2+\frac{d}{dx}9y^2-\frac{d}{dx}10xy+\frac{d}{dx}6x-\frac{d}{dx}4=\frac{d}{dx}0$$
$$32x^3+\left(12x^3 2y\frac{dy}{dx}+y^2 36x^2\right)+18y\frac{dy}{dx}-\left(10x\frac{dy}{dx}+y10\right)+6-0=0$$
$$32x^3+24x^3y\frac{dy}{dx}+36x^2y^2+18y\frac{dy}{dx}-10x\frac{dy}{dx}-10y+6=0$$
$$24x^3y\frac{dy}{dx}+18y\frac{dy}{dx}-10x\frac{dy}{dx}=-32x^3-36x^2y^2+10y-6$$
$$\frac{dy}{dx}\left(24x^3y+18y-10x\right)=-32x^3-36x^2y^2+10y-6$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-32x^3-36x^2y^2+10y-6}{24x^3y+18y-10x}$$

Si se tiene una función $f(x,y)=0$, se conoce como *derivada parcial de* f *con respecto a* x a la derivada de la función, sólo considerando a x como variable y lo demás como constante[2]. Se denota como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Similarmente, la *derivada parcial de* f *con respecto a* y es la derivada de la función, sólo considerando a y como variable y lo demás como constante. Se denota como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ejemplos.

Obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de las siguientes funciones:

1) $3x^2+7x^4y^2+8x^2y^6-9y^5+6x+2=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+28x^3y^2+16xy^6+6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=14x^4y+48x^2y^5-45y^4$$

2) $4x^4y^3-6x^2+3y^7-9x^2y^4-12=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=16x^3y^3-12x-18xy^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=12x^4y^2+21y^6-36x^2y^3$$

Dada una función implícita de la forma $f(x,y)$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ puede obtenerse muy fácilmente a través de la aplicación de derivadas parciales, por medio de la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Ejemplos.

Aplicando derivadas parciales, obtener $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones expresadas en forma implícita:

---

[2] La definición de derivada parcial es mucho más formal y amplia que lo expuesto. El concepto dado aquí es sólo para poseer otro recurso para resolver derivadas expresadas en forma implícita. En cursos posteriores de Cálculo se comprenderá el importante significado y utilidad de una derivada parcial.

1) $5x^4 - 12x^3y^2 + 9y^2 - 10 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-20x^3 + 36x^2y^2}{-24x^3y + 18y}$$

2) $3x^5 - 6x^4y^6 + 2y^3 + 8x - 7y^5 + 15 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-15x^4 + 24x^3y^6 - 8}{-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4}$$

Ejemplos.

Comprobar los resultados de los primeros cinco ejercicios resueltos de este subtema.

1) $4x^2y^3 + 5x^4 - 2y^5 - 12 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-8xy^3 - 20x^3}{12x^2y^2 - 10y^4}$$

2) $3x^5 - 6x^4y^6 + 2y^3 + 8x^3 - 7y^5 + 15 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-15x^4 + 24x^3y^6 - 24x^2}{-36x^4y^5 + 6y^2 - 35y^4}$$

3) $8x^4 - 2x^3y^4 + 7x^7 - 10x^3y - 11 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-32x^3 + 6x^2y^4 - 49x^6 + 30x^2y}{-8x^3y^3 - 10x^3}$$

4) $6x^3 - 11x^2y^3 + 5y^4 - 8x^3y^5 + 5x - 11 = 0$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-18x^2 + 22xy^3 + 24x^2y^5 - 5}{-33x^3y^2 + 20y^3 - 40x^3y^4}$$

5) $8x^4 + 12x^3y^2 + 9y^2 - 10xy + 6x - 4 = 0$
Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-32x^3 - 36x^2y^2 + 10y - 6}{24x^3y + 18y - 10x}$$

III.9 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Dada una función expresada en forma paramétrica, tal y como se definió en el tema I.6, de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = f(t) \end{array}\right\}$$

Su derivada viene dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ejemplos.
Obtener la derivada de las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica:

1) $\left.\begin{array}{l} x = 4t^2 - 6t + 9 \\ y = 5t^3 - 7t^2 - 10t + 2 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8t - 6}{15t^2 - 14t - 10}$$

2) $\left.\begin{array}{l} x = \left(8t^3 - 11t^2 - 13\right)^4 \\ y = \left(12t^4 - 13t^2\right)\left(4t^2 - 5t^5\right) \end{array}\right\}$

Solución:
Para hallar $\frac{dx}{dt}$ se aplica la regla de la cadena y para encontrar $\frac{dy}{dt}$ se aplica la regla del producto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(12t^4 - 13t^2\right)\left(8t - 25t^4\right) + \left(4t^2 - 5t^5\right)\left(48t^3 - 26t\right)}{4\left(48t^3 - 11t^2 - 13\right)^3\left(24t^2 - 22t\right)}$$

3) $\left.\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{t} \\ y=\sqrt[8]{5t} \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x=t^{\frac{1}{3}} \\ y=(5t)^{\frac{1}{8}} \end{array}\right\}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{5}{8\sqrt[8]{(5t)^7}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}}$$

4) $\left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{t^5} \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{t}} \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x=-3t^{-5} \\ y=2t^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right\}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{t^3}}}{\frac{15}{t^6}}$$

5) $\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{2-9t^4} \\ y=\dfrac{4t-8}{6t^3-7t^5} \end{array}\right\}$

Solución:

Para hallar $\frac{dx}{dt}$ se aplica la regla $\frac{d}{dt}\sqrt{u}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{dt}$ y para encontrar $\frac{dy}{dt}$ se aplica la regla del cociente:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{(6t^3-7t^5)(4)-(4t-8)(18t^2-35t^4)}{(6t^3-7t^5)^2}}{-\frac{18t^3}{\sqrt{2-9t^4}}}$$

La segunda derivada de una función expresada en forma paramétrica está dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

Ejemplos.
Obtener la segunda derivada de las siguientes funciones expresadas en forma paramétrica:

1) $\left.\begin{aligned} x &= 4t^2-5t+1 \\ y &= 2t^3-21 \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2}{8t-5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{6t^2}{8t-5}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{(8t-5)(12t)-(6t^2)(8)}{(8t-5)^2}\cdot\frac{1}{8t-5}=\frac{96t^2-60t-48t^2}{(8t-5)^3}$$

$$=\frac{48t^2-60t}{(8t-5)^3}$$

2) $\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{t} \\ y &= 3t^5 \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{15t^4}{-\frac{1}{t^2}}=-15t^6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-15t^6\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-90t^5\cdot\left(-t^2\right)=90t^7$$

III.10 DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Sea una función $y=f(x)$ en el intervalo abierto (a,b) cuya derivada no cambia de signo. Si su función inversa es $x=g(y)$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ viene dada por:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Ejemplos.
Obtener la derivada de la función inversa de:

1) $f(x)=8x-6$
Solución:
Forma 1. Obteniendo la función inversa:

$$x=8y-6 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{x+6}{8}$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{8}$$

Forma 2. Aplicando la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{8}$$

2) $f(x)=x^2-5$
Solución:
Forma 1. Obteniendo la función inversa:

$$x=y^2-5 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x+5}$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

Forma 2. Aplicando la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

3) $f(x)=\sqrt{4x+1}$
Solución:
Forma 1. Obteniendo la función inversa:

$$x=\sqrt{4y+1} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{x^2-1}{4}$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$$

Forma 2. Aplicando la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{4}{2\sqrt{4y+1}}}=\frac{2\sqrt{4y+1}}{4}=\frac{x}{2}$$

Ejemplos.
Aplicando la expresión $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ obtener la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=(x+3)^2$

Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=(y+3)^2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{x}-3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2(y+3)}=\frac{1}{2\left(\sqrt{x}-3+3\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) $f(x)=\frac{5}{x}$

Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=\frac{5}{y} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{5}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{-5}{y^2}}=-\frac{y^2}{5}=-\frac{\left(\frac{5}{x}\right)^2}{5}=-\frac{25}{5x^2}=-\frac{5}{x^2}$$

3) $f(x)=\frac{2}{x-17}$

Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=\frac{2}{y-17} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\frac{2}{x}+17$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\frac{2}{(y-17)^2}}=-\frac{(y-17)^2}{2}=-\frac{\left(\frac{2}{x}-17+17\right)^2}{2}=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{2}=-\frac{2}{x^2}$$

4) $f(x)=\sqrt[3]{4x^2+10}$.

Solución:
Obteniendo la función inversa:

$$x=\sqrt[3]{4y^2+10} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=g(x)=\sqrt{\frac{x^3-10}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(4y^2+10\right)^{-\frac{2}{3}}(8y)}=\frac{3\sqrt[3]{\left(4y^2+10\right)^2}}{8y}=\frac{3x^2}{8\sqrt{\frac{x^3-10}{4}}}$$

III.11 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

Las funciones trigonométricas o circulares directas fueron expuestas con amplitud en el capítulo II del libro de Matemáticas V de esta misma serie. Las derivadas de estas funciones se deducen a continuación:

1) $\frac{d}{dx}(sen\,x)=\cos x$

Demostración:

1er paso: $f(x+\Delta x)=sen(x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x)-f(x)=sen(x+\Delta x)-sen\,x$

considerando la identidad trigonométrica: $sen(a+b)-sen\,a=2\cos\left(a+\frac{1}{2}b\right)\cdot sen\frac{1}{2}b$

se tiene: $f(x+\Delta x)-f(x)=2\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot sen\frac{1}{2}\Delta x$

3er paso: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot sen\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

pero se sabe que: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}=1$

$$\Rightarrow\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\cdot 1=\cos x$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}(sen\,x)=\cos x$$

2) $\frac{d}{dx}(\cos x)=-sen\,x$

Demostración:

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos x=sen\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$, se tiene:

$$f(x)=sen\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$$

derivando la función:

$$\frac{d}{dx}sen\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)=(-1)\cos\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$$

pero se sabe que: $sen\,x=\cos\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\cos x)=-sen\,x$$

3) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

Demostración:

$$f(x) = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x) = \frac{\cos x(\cos x) - sen\ x(-sen\ x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

4) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

Demostración:

$$f(x) = \frac{\cos x}{sen\ x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x) = \frac{sen\ x(-sen\ x) - \cos\ x(\cos x)}{(sen\ x)^2} = \frac{-sen^2 x - \cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{-1(sen^2 x + \cos^2 x)}{sen^2 x}$$

$$= \frac{-1}{sen^2 x} = -\csc^2 x$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

5) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$

Demostración:

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x) = -\frac{(-sen\, x)}{(\cos x)^2} = \frac{sen\, x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{sen\, x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$$

6) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x$

Demostración:

$$f(x) = \frac{1}{sen\ x}$$

derivando el cociente:

$$f'(x) = -\frac{(\cos x)}{(sen\, x)^2} = -\frac{\cos x}{sen^2 x} = -\frac{1}{sen\, x} \cdot \frac{\cos x}{sen\, x} = -\csc x \cdot \cot x$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cdot\cot x$$

Aplicando la regla de la cadena, en donde $u=f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx}sen\,u=\cos u\cdot\frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx}\cos u=-sen\,u\cdot\frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\cdot\frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\cdot\frac{du}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\cdot\tan u\cdot\frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cdot\cot u\cdot\frac{du}{dx}$

Ejemplos.
Derivar las siguientes funciones trigonométricas.

1) $y=sen\,4x$

$$\frac{dy}{dx}=4\cos 4x$$

2) $y=3\cos 9x$

$$\frac{dy}{dx}=3(9)(-sen\,9x)=-27sen\,9x$$

3) $y=5\tan 2x^3$

$$\frac{dy}{dx}=5(6x^2)\sec^2 2x^3=30x^2\sec^2 2x^3$$

4) $y=6\cot(5x^2-8x^7)$

$$\frac{dy}{dx}=-6(10x-56x^6)\csc^2(5x^2-8x^7)=(-60x+336x^6)\csc^2(5x^2-8x^7)$$

5) $y=8\sec 2x^4$

$$\frac{dy}{dx}=8(8x^3)\sec 2x^4\tan 2x^4=64x^3\sec 2x^4\tan 2x^4$$

6) $y=4\csc(3x^5-6x)$

$$\frac{dy}{dx}=-4(15x^4-6)\csc(3x^5-6x)\cot(3x^5-6x)=(-60x^4+24)\csc(3x^5-6x)\cot(3x^5-6x)$$

7) $y=12sen(4x^2-9x+7)$

$$\frac{dy}{dx}=12(8x-9)\cos(4x^2-9x+7)=(96x-108)\cos(4x^2-9x+7)$$

8) $y = -6\cos\left(10x^3 - 8x + 3\right)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 30\left(10x^3 - 8x + 3\right)^4\left(30x^2 - 8\right)sen\left(10x^3 - 8x + 3\right)^5$$

9) $y = \sqrt{\tan 3x}$

$$y = (\tan 3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\tan 3x)^{-\frac{1}{2}}\left(3\sec^2 3x\right) = \frac{3\sec^2 3x}{2\sqrt{\tan 3x}}$$

10) $y = \left(4\cot 2x^2\right)\left(\sec 5x^4\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \left(4\cot 2x^2\right)\left(20x^3 \sec 5x^4 \tan 5x^4\right) + \left(\sec 5x^4\right)\left(-4(4x)\csc^2 2x^2\right)$$

$$= 80x^3 \cot 2x^2 \sec 5x^4 \tan 5x^4 - 16x \sec 5x^4 \csc^2 2x^2$$

11) $y = \dfrac{7\csc\ 2x^3}{-5sen 8x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-5sen 8x)\left(-7\left(6x^2\right)\csc 2x^3 \cot 2x^3\right) - \left(7\csc 2x^2\right)\left(-5(8)\cos 8x\right)}{(-5sen 8x)^2}$$

$$= \frac{210x^2 sen 8x \csc 2x^3 \cot 2x^3 + 280\csc 2x^2 \cos 8x}{25sen^2 8x}$$

12) $y = sen\, x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\cos x^2$$

13) $y = sen^2 x$

$$y = (sen\, x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2sen\, x \cdot \cos x$$

Nótese como las funciones de los ejercicios 12 y 13, aunque aparentemente son similares, son muy diferentes: en el primer caso el cuadrado está afectando al argumento de la función. En el segundo caso, el cuadrado está afectando a la función seno. En conclusión, sus derivadas son totalmente distintas. Algo muy similar sucede con los siguientes dos ejercicios:

14) $y = \cos x^3$

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 sen\, x^3$$

15) $y = \cos^3 x$

$$y = (\cos x)^3$$

$$\frac{dy}{dx}=3\cos^2 x\left(-\,sen\,x\right)=-3\cos^2 x\,sen\,x$$

16) $y=\cot^7 9x^4$

$$y=\left(\cot 9x^4\right)^7$$

$$\frac{dy}{dx}=7\cot^6 9x^4\left(-36x^3\csc^2 9x^4\right)=-252x^3\cot^6 9x^4\csc^2 9x^4$$

17) $y=\left(10\sec 15x^3\right)\left(8\tan 9x\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(10\sec 15x^3\right)\left(8(9)\sec^2 9x\right)+\left(8\tan 9x\right)\left(10\left(45x^2\right)\sec 15x^3\tan 15x^3\right)$$

$$=720\sec 15x^3\sec^2 9x+3600x^2\tan 9x\sec 15x^3\tan 15x^3$$

18) $y=\dfrac{sen\,10x^3}{\cos 10x^3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\cos 10x^3\right)\left(30x^2\cos 10x^3\right)-\left(sen\,10x^3\right)\left(-30x^2 sen\,10x^3\right)}{\left(\cos 10x^3\right)^2}$$

$$=\frac{30x^2\cos^2 10x^3+30x^2 sen^2 10x^3}{\cos^2 10x^3}=\frac{30x^2\left(\cos^2 10x^3+sen^2 10x^3\right)}{\cos^2 10x^3}=\frac{30x^2}{\cos^2 10x^3}=30x^2\sec^2 10x^3$$

19) $y=\tan 10x^3$

$$\frac{dy}{dx}=30x^2\sec^2 10x^3$$

Se observa como la derivada de las funciones de los ejercicios 18 y 19 son iguales. Eso significa que aplicar convenientemente identidades trigonométricas puede simplificar notablemente el proceso de derivación. Un caso similar sucede con las derivadas de los ejercicios 20 y 21:

20) $y=\dfrac{1}{sen^5\left(11x^4-6x^2+8\right)}$

$$y=sen^{-5}\left(11x^4-6x^2+8\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-5\left(44x^3-12x\right)sen^{-6}\left(11x^4-6x^2+8\right)\cos\left(11x^4-6x^2+8\right)$$

pero como $\dfrac{\cos u}{sen\,u}=\cot u$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5\left(44x^3-12x\right)\cos\left(11x^4-6x^2+8\right)}{sen^6\left(11x^4-6x^2+8\right)}=-\frac{5\left(44x^3-12x\right)\cot\left(11x^4-6x^2+8\right)}{sen^5\left(11x^4-6x^2+8\right)}$$

y $\dfrac{1}{sen\,u}=\csc u$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=-5\left(44x^3-12x\right)\cot\left(11x^4-6x^2+8\right)\csc^5\left(11x^4-6x^2+8\right)$$

21) $y = \csc^5\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)$

$$\frac{dy}{dx} = 5\left(44x^3 - 12x\right)\csc^4\left(11x^4 - 6x + 8\right)\cdot\left(-\csc\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)\cot\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -5\left(44x^3 - 12x\right)\cot\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)\cdot\csc^5\left(11x^4 - 6x^2 + 8\right)$$

III.12 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas inversas definidas poseen reglas de derivación. A continuación se deducen las seis fórmulas considerando sus respectivos campos de variación.

1) $\frac{d}{dx}\left(sen^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Demostración:

$$y = sen^{-1}x \quad \Rightarrow \quad x = sen\, y$$

derivando:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}sen\, y = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$sen^2 y + \cos^2 y = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \cos^2 y = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos y = \sqrt{1-x^2}$$

$$1 = \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(sen^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Demostración:

$$y = \cos^{-1}x \quad \Rightarrow \quad x = \cos y$$

derivando:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}\cos y = -sen\, y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = -sen\, y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$sen^2 y + \cos^2 y = 1 \quad \Rightarrow \quad sen^2 y + x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad sen\, y = \sqrt{1-x^2}$$

$$1 = -\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right)=\frac{1}{1+x^2}$

Demostración:

$y=\tan^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x=\tan y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\tan y=\sec^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=\sec^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\sec^2 y=1+\tan^2 y \quad \Rightarrow \quad \sec^2 y=1+x^2$$

$$1=\left(1+x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right)=\frac{1}{1+x^2}$$

4) $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right)=\frac{-1}{1+x^2}$

Demostración:

$y=\cot^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x=\cot y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\cot y=-\csc^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=-\csc^2 y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\csc^2 y=1+\cot^2 y \quad \Rightarrow \quad \csc^2 y=1+x^2$$

$$1=-\left(1+x^2\right)\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right)=\frac{-1}{1+x^2}$$

5) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Demostración:

$y=\sec^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x=\sec y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}\sec y=\sec y\cdot\tan y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$1=\sec\ y\cdot\tan y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\sec^2 y=1+\tan^2 y \quad \Rightarrow \quad \tan^2 y=\sec^2 y-1 \quad \Rightarrow \quad \tan y=\sqrt{x^2-1}$$

$$1=x\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

6) $\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Demostración:

$y = \csc^{-1} x \quad \Rightarrow \quad x = \csc y$

derivando:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}\csc y = -\csc y \cdot \cot y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = -\csc y \cdot \cot y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\csc^2 y = 1 + \cot^2 y \quad \Rightarrow \quad \cot^2 y = \csc^2 x - 1 \quad \Rightarrow \quad \cot y = \sqrt{x^2-1}$$

$$1 = -x \cdot \sqrt{x^2-1} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Aplicando la regla de la cadena, en donde $u = f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx} sen^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

4) $\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

5) $\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

6) $\frac{d}{dx} \csc^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

Ejemplos.

Derivar las siguientes funciones trigonométricas inversas:

1) $y = sen^{-1} 5x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}(5) = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

2) $y = \cos^{-1} \frac{1}{3} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}x\right)^2}}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-1}{3\sqrt{1-\frac{1}{9}x^2}}$$

3) $y = \tan^{-1} 2x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(2x^3\right)^2}\left(6x^2\right) = \frac{6x^2}{1+4x^6}$$

4) $y = \cot^{-1} 10x^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+\left(10x^4\right)^2}\left(40x^3\right) = \frac{-40x^3}{1+100x^8}$$

5) $y = 2\sec^{-1}\left(13x^2 - 12x + 1\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\left(13x^2 - 12x + 1\right)\sqrt{\left(13x^2 - 12x + 1\right)^2 - 1}}\left(26x - 12\right)$$

$$= \frac{52x - 24}{\left(13x^2 - 12x + 1\right)\sqrt{\left(13x^2 - 12x - 12\right)^2 - 1}}$$

6) $y = -9\csc^{-1}\left(14x^3 - 4x\right)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-9}{\left(14x^3 - 4x\right)\sqrt{\left(14x^3 - 4x\right)^2 - 1}}\left(42x^2 - 4\right)$$

$$= \frac{378x^2 - 36}{\left(14x^3 - 4x\right)\sqrt{\left(14x^3 - 4x\right)^2 - 1}}$$

7) $y = 4sen^{-1} 3x^5 \cdot \cos^{-1} 8x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4sen^{-1} 3x^5 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(8x^4\right)^2}}\left(32x^3\right) + \cos^{-1} 8x^4 \cdot \frac{4}{\sqrt{1-\left(3x^5\right)^2}}\left(15x^4\right)$$

$$= -4sen^{-1} 3x^5 \cdot \frac{32x^3}{\sqrt{1-64x^8}} + \cos^{-1} 8x^4 \cdot \frac{60x^4}{\sqrt{1-9x^{10}}}$$

8) $y = \dfrac{2\csc^{-1} 4x}{5\tan^{-1} 3x^7}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5\tan^{-1} 3x^7 \cdot \dfrac{-2}{4x\sqrt{(4x)^2 - 1}}(4) - 2\csc^{-1} 4x \cdot \dfrac{5}{1+\left(3x^7\right)^2}\left(21x^6\right)}{\left(5\tan^{-1} 3x^7\right)^2}$$

$$= \frac{-\dfrac{10\tan^{-1} 3x^7}{x\sqrt{16x^2 - 1}} - \dfrac{210x^6 \csc^{-1} 4x}{1+9x^{14}}}{\left(5\tan^{-1} 3x^7\right)^2}$$

9) $y = \sec^{-1} \sec\left(5x^2 + 7x - 4\right)$

Por ser funciones inversas, se eliminan:

$$y = 5x^2 + 7x - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 10x + 7$$

10) $y = \sqrt[6]{\cot^{-1} 2x^2}$

$$y = \left(\cot^{-1} 2x^2\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}\left(\cot^{-1} 2x^2\right)^{-\frac{5}{6}} \cdot \frac{-1}{1+\left(2x^2\right)^2}(4x) = -\frac{4x}{6\sqrt[6]{\left(\cot^{-1} 2x^2\right)^5}\left(1+4x^4\right)}$$

III.13 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Las reglas de derivación para las funciones exponenciales y logarítmicas se deducen a continuación:

1) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

Demostración:

1^er paso: $f(x+\Delta x) = \log_a (x+\Delta x)$

2º paso: $f(x+\Delta x) - f(x) = \log_a (x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$

3^er paso: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

4º paso:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a \left[\lim_{\Delta x\to 0} \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

2) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

para este caso: $a = e$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

3) $\frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln a$

Demostración:

$y = a^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln a^x = x \ln a$

derivando con respecto a x:

$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln a \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \cdot \ln a$

4) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

Demostración:

$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \cdot \ln a$

para este caso: $a = e$

$f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x(1) = e^x$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$

Aplicando la regla de la cadena, en donde $u = f(x)$, las expresiones anteriores toman la siguiente forma:

1) $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u}\log_a e \cdot \frac{du}{dx} \qquad (a > 0,\, a \neq 1)$

2) $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln u \cdot \frac{du}{dx} \qquad (a > 0)$

4) $\frac{d}{dx}e^u = e^u \cdot \frac{du}{dx}$

Ejemplos.
Derivar las siguientes funciones:

1) $y = \log_3\left(x^4 - 7x^2 - 16\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 14x}{x^4 - 7x^2 - 16}\log_3 e$

2) $y = \log_5\left(sen 3x^4\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^3 \cos 3x^4}{sen 3x^4}\log_5 e$

3) $y = \ln\left(2x^2 - x - 1\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x-1}{2x^2 - x - 1}$$

4) $y = \ln\cos 5x^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-20x^3\, sen 5x^4}{\cos 5x^4}$$

$$= -20x^3 \tan 5x^4$$

5) $y = 7^{5x}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(7^{5x}\ln(5x)\right)5$$

6) $y = 4^{\left(3x^2 - 9x - 1\right)}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(4^{\left(3x^2-9x-1\right)}\ln\left(3x^2 - 9x - 1\right)\right)\left(6x-9\right)$$

7) $y = e^{2x^5}$

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4\, e^{2x^5}$$

8) $y = e^{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

9) $y = \log_2\left(3x^2 - 4x + 7\right)^5$

Aplicando la propiedad:

$\log_a x^n = n\log_a x$ se tiene:

$$y = 5\log_2\left(3x^2 - 4x + 7\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5(6x-4)}{3x^2 - 4x + 7}\log_2 e$$

10) $y = \ln\left(6x^2 - 8x\right)\left(5x^3 - 2x^2\right)$

Aplicando la propiedad:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ se tiene:

$$y = \ln\left(6x^2 - 8x\right) + \ln\left(5x^3 - 2x^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x-8}{6x^2 - 8x} + \frac{15x^2 - 4x}{5x^3 - 2x^2}$$

11) $y = \ln \frac{3^{8x^2}}{4e^{3x^5}}$

Aplicando la propiedad: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ se tiene:

$$y = \ln 3^{8x^2} - \ln 4e^{3x^5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(3^{8x^2} \ln 8x^2\right)16x}{3^{8x^2}} - \frac{4e^{3x^5}\left(15x^4\right)}{4e^{3x^5}} = 16x \ln 8x^2 + 15x^4$$

12) $y = \ln \left(\frac{\left(\sqrt[5]{\log_4 \left(6x^3\right)}\right) \cdot \cos^{-1} 3x^6}{\left(4sen\,2x\right)^3} \right)$

Aplicando convenientemente las propiedades de logaritmos se tiene:

$$y = \ln \sqrt[5]{\log_4 6x^3} \cdot \cos^{-1} 3x^6 - \ln\left(4sen\,2x\right)^3$$

$$y = \ln \sqrt[5]{\log_4 6x^3} + \ln \cos^{-1} 3x^6 - 3\ln 4sen\,2x$$

$$y = \ln\left(\log_4 6x^3\right)^{\frac{1}{5}} + \ln \cos^{-1} 3x^6 - 3\ln 4sen\,2x$$

$$y = \frac{1}{5}\ln\left(\log_4 6x^3\right) + \ln \cos^{-1} 3x^6 - 3\ln 4sen\,2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\frac{\frac{18x^2}{6x^3}\log_4 e}{\log_4 6x^3} + \frac{\frac{-18x^5}{\sqrt{1-\left(3x^6\right)^2}}}{\cos^{-1} 3x^6} - \frac{24\cos 2x}{4sen\,2x}$$

$$= \frac{18\log_4 e}{30x\log_4 6x^3} - \frac{18x^5}{\left(\cos^{-1} 3x^6\right)\sqrt{1-9x^{12}}} - 6\cot 2x$$