APLICACIONES DE LA DERIVADA

UNIDAD IV

A través del uso del concepto de derivada se logra conocer algunas propiedades relevantes de las funciones. El estudio de estas características facilita la representación gráfica y la interpretación analítica de las mismas, lo que posibilita su mejor entendimiento. El objetivo de este capítulo es obtener información de las funciones a partir de su derivada y conocer más acerca de su comportamiento.

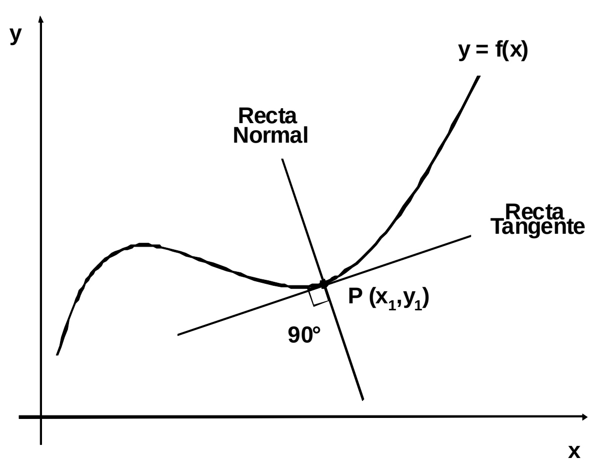
IV.1 RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL DE UNA CURVA

Si una función $y = f(x)$ posee una derivada en el punto x_1, la curva tiene una tangente en $P(x_1, y_1)$ cuya pendiente es: $m_1 = \tan\theta = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = f'(x_1)$.

Se sabe que la ecuación de la recta que pasa por un punto y con una pendiente dada es: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Por lo tanto, si se sustituye la pendiente por la derivada, la ecuación de la *recta tangente* en un punto de una curva es:

$$y - y_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} (x - x_1)$$

Si $m = 0$ tiene tangente horizontal a la curva. Si $m = \infty$ tiene tangente vertical a la curva.



Una *recta normal* a una curva en uno de sus puntos es la recta que pasando por dicho punto es perpendicular a la recta tangente en él.

La condición de perpendicular entre dos rectas es: $m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}}$

La ecuación de la recta normal en el punto $P(x_1, y_1)$ es:

$$y - y_1 = -\left.\frac{1}{m_1}\right|_{x=x_1}(x - x_1)$$

Ejemplos.
Hallar las ecuaciones de las recta tangente y normal de las siguientes curvas en el punto indicado.

1) $y = 3x^2 - 5x + 4 \qquad P(2,6)$
Solución:
$m_1 = \frac{dy}{dx} = 6x - 5\big|_{x=2} = 6(2) - 5 = 12 - 5 = 7$
$y - 6 = 7(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y - 6 = 7x - 14 \quad \Rightarrow \quad 7x - y - 8 = 0$ (recta tangente).
$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{7}$
$y - 6 = -\frac{1}{7}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 7(y - 6) = -(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 7y - 42 = -x + 2$
$\Rightarrow \quad x + 7y - 44 = 0$ (recta normal).

2) $y = 9x^3 - 12x - 5 \qquad P(-1,-2)$
Solución:
$m_1 = \frac{dy}{dx} = 27x^2 - 12\big|_{x=-1} = 27(-1)^2 - 12 = 27 - 12 = 15$
$y - (-2) = 15(x - (-1)) \quad \Rightarrow \quad y + 2 = 15(x + 1) \quad \Rightarrow \quad y + 2 = 15x + 15$
$\Rightarrow \quad 15x - y + 13 = 0$ (recta tangente).
$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{15}$
$y - (-2) = -\frac{1}{15}(x - (-1)) \quad \Rightarrow \quad 15(y + 2) = -(x + 1) \quad \Rightarrow \quad 15y + 30 = -x - 1$
$\Rightarrow \quad x + 15y + 31 = 0$ (recta normal).

3) $y = \frac{1}{x} \qquad P\left(2, \frac{1}{2}\right)$
Solución:
$m_1 = \frac{dy}{dx} = -\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$
$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 4\left(y - \frac{1}{2}\right) = -(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 4y - 2 = -x + 2 \quad \Rightarrow \quad x + 4y - 4 = 0$
(recta tangente).
$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{4}} = 4$

$$y-\frac{1}{2}=4(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-\frac{1}{2}=4x-8 \quad \Rightarrow \quad 2y-1=8x-16$$

$\Rightarrow \quad 8x-2y-15=0$ (recta normal).

4) $-x^2y+6x-y^2x^2+4y-12=0 \qquad P(0,3)$

Solución:

$$m_1=\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\left.\frac{2xy-6+2xy^2}{-x^2-2x^2y+4}\right|_{(0,3)}=\frac{2(0)(3)-6+2(0)(3)^2}{-(0)^2-2(0)^2(3)+4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

$$y-3=-\frac{3}{2}(x-0) \quad \Rightarrow \quad 2(y-3)=-3x \quad \Rightarrow \quad 2y-6=-3x$$

$\Rightarrow \quad 3x+2y-6=0$ (recta tangente).

$$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-\frac{6}{4}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$y-3=\frac{2}{3}(x-0) \quad \Rightarrow \quad 3(y-3)=2x \quad \Rightarrow \quad 3y-9=2x \quad \Rightarrow \quad 2x-3y+9=0$ (recta normal).

5) $y=-7x^4+12x^2+4x \qquad P(1,9)$

Solución:

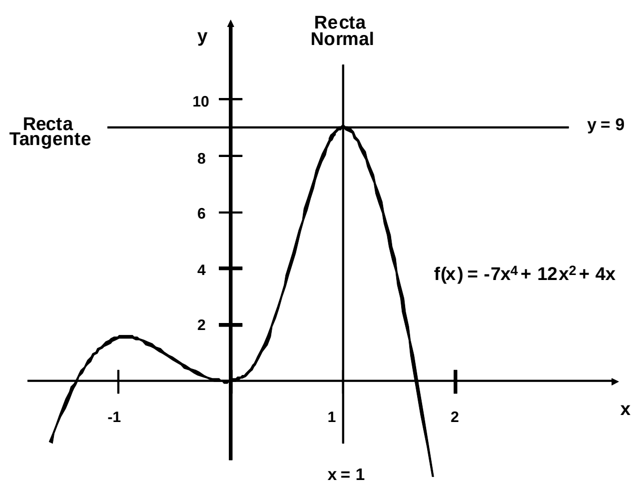
$$m_1=\frac{dy}{dx}=-28x^3+24x+4\Big|_{x=1}=-28(1)^3+24(1)+4=-28+24+4=0$$

$y-9=0(x-1) \quad \Rightarrow \quad y-9=0 \quad \Rightarrow \quad y=9$ (recta tangente).

$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{0}$ (pendiente de 90°, o sea, es infinita)

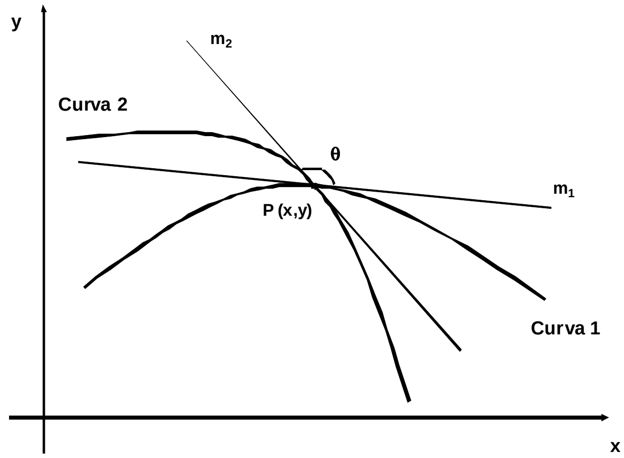
$y-9=-\frac{1}{0}(x-1) \quad \Rightarrow \quad 0(y-9)=-(x-1) \quad \Rightarrow \quad 0=-x+1 \quad \Rightarrow \quad x=1$ (recta normal).

Gráficamente, esto es:



IV.2 ÁNGULO ENTRE DOS CURVAS

Dadas dos curvas cualesquiera, el ángulo de intersección entre ellas está dado por el ángulo formado por sus tangentes en el punto de intersección.



El procedimiento para obtener el ángulo de intersección entre dos curvas es el siguiente:

1. Se calculan las coordenadas de los puntos de intersección, resolviendo las ecuaciones formadas por las funciones.
2. Se derivan las ecuaciones para encontrar las pendientes de las tangentes de las curvas para cada uno de los puntos de intersección.
3. Se aplica la siguiente expresión:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

En caso de que se obtenga un ángulo agudo θ que sea negativo, el ángulo de intersección es: $-\theta$.
En caso de que se obtenga un ángulo no agudo θ que sea positivo, el ángulo de intersección es: $180° - \theta$.
En caso de que se obtenga un ángulo no agudo θ que sea negativo, el ángulo de intersección es: $180° + \theta$.

Nótese como:

- Si las pendientes son iguales, el ángulo de intersección es cero.
- Si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, el ángulo de intersección es de $90°$, es decir las curvas son ortogonales.

Ejemplos.
Obtener el ángulo de intersección entre las siguientes curvas:

1) $f(x) = 5x - 7$ y $g(x) = -3x + 9$
Solución:

Igualando las funciones: $5x - 7 = -3x + 9 \quad \Rightarrow \quad 8x = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{16}{8} = 2$

Derivando:
$$\frac{df(x)}{dx} = 5$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = -3$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{5-(-3)}{1+(5)(-3)} = \tan^{-1}\frac{8}{-14} = \tan^{-1}(-0.5714) = -29.74°$$

$$\therefore \quad \theta_1 = 29.74°$$

2) $f(x) = -3x^2 - 10x - 14$ y $g(x) = 11x + 16$

Solución:

Igualando las funciones: $-3x^2 - 10x - 14 = 11x + 16 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 - 21x - 30 = 0$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 + 21x + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 7x + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+5)(x+2) = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = -5; \quad x_2 = -2$$

Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx} = -6x - 10$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = 11$$

Evaluando el punto $x_1 = -5$:

$$m_1 = -6x - 10\Big|_{x=-5} = -6(-5) - 10 = 30 - 10 = 20$$

$$m_2 = 11\Big|_{x=-5} = 11$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{20-11}{1+(20)(11)} = \tan^{-1}\frac{9}{221} = \tan^{-1}(0.0407) = 2.33°$$

Evaluando el punto $x_1 = -2$:

$$m_1 = -6x - 10\Big|_{x=-2} = -6(-2) - 10 = 12 - 10 = 2$$

$$m_2 = 11\Big|_{x=-2} = 11$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{2-11}{1+(2)(11)} = \tan^{-1}\frac{-9}{23} = \tan^{-1}(-0.3913) = 21.37°$$

3) $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x-2)^2$

Solución:

Igualando las funciones: $x^2 = (x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = x^2 - 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad 4x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{4} = 1$

Derivando:

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = 2(x-2)$$

Evaluando el punto $x = 1$:

$$m_1 = 2x\Big|_{x=1} = 2(1) = 2$$

$$m_2 = 2(x-2)\Big|_{x=1} = 2(1-2) = 2(-1) = -2$$

$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\frac{2-(-2)}{1+(2)(-2)} = \tan^{-1}\frac{4}{-3} = \tan^{-1}(-1.3333) = -53.13°$

$\therefore \quad \theta = 53.13°$

4) $f(x) = 4x^2 + 5x - 7$ y $g(x) = -6x^2 - 2x + 5$

Solución:

Igualando las funciones:

$4x^2 + 5x - 7 = -6x^2 - 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 + 7x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 10, \quad b = 7, \quad c = -12$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(10)(-12)}}{2(10)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+480}}{20} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{20} = \frac{-7 \pm 23}{20}$

$\therefore \quad x_1 = \frac{-7+23}{20} = \frac{16}{20} = 0.8; \quad x_2 = \frac{-7-23}{20} = -\frac{30}{20} = -1.5$

Derivando:

$\frac{df(x)}{dx} = 8x + 5$

$\frac{dg(x)}{dx} = -12x - 2$

Evaluando el punto $x_1 = 0.8$:

$m_1 = 8x + 5\big|_{x=0.8} = 8(0.8) + 5 = 6.4 + 5 = 11.4$

$m_2 = -12x - 2\big|_{x=0.8} = -12(0.8) - 2 = -9.6 - 2 = -11.6$

$\Rightarrow \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{11.4-(-11.6)}{1+(11.4)(-11.6)} = \tan^{-1}\frac{23}{-131.24} = \tan^{-1}(-0.1752) = -9.94°$

$\therefore \quad \theta_1 = 9.94°$

Evaluando el punto $x_2 = -1.5$:

$m_1 = 8x + 5\big|_{x=-1.5} = 8(-1.5) + 5 = -12 + 5 = -7$

$m_2 = -12x - 2\big|_{x=-1.5} = -12(-1.5) - 2 = 18 - 2 = 16$

$\therefore \quad \theta_2 = \tan^{-1}\frac{-7-16}{1+(-7)(16)} = \tan^{-1}\frac{-23}{-111} = \tan^{-1}(0.2072) = 11.70°$

5) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ y $x^2 + y^2 - 8 = 0$

Solución:

Igualando las funciones: $x^2 + y^2 - 4x = x^2 + y^2 - 8 \quad \Rightarrow \quad -4x = -8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-8}{-4} = 2$

obteniendo las ordenadas: $y = \pm\sqrt{8 - x^2} = \pm\sqrt{8 - 2^2} = \pm\sqrt{8-4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\therefore \quad P_1(2,2); \quad P_2(2,-2)$

Derivando:

$\frac{df(x)}{dx} = \frac{-2x+4}{2y}$

$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{-2x}{2y}$

Evaluando el punto $(2,2)$:

$$m_1 = \left.\frac{-2x+4}{2y}\right|_{(2,2)} = \frac{-2(2)+4}{2(2)} = \frac{0}{4} = 0$$

$$m_2 = \left.\frac{-2x}{2y}\right|_{(2,2)} = \frac{-2(2)}{2(2)} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{0-(-1)}{1+0(-1)} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}(1) = 45°$$

Evaluando el punto $(2,-2)$:

$$m_1 = \left.\frac{-2x+4}{2y}\right|_{(2,-2)} = \frac{-2(2)+4}{2(-2)} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$m_2 = \left.\frac{-2x}{2y}\right|_{(2,-2)} = \frac{-2(2)}{2(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{0-1}{1+0(1)} = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = \tan^{-1}(-1) = -45°$$

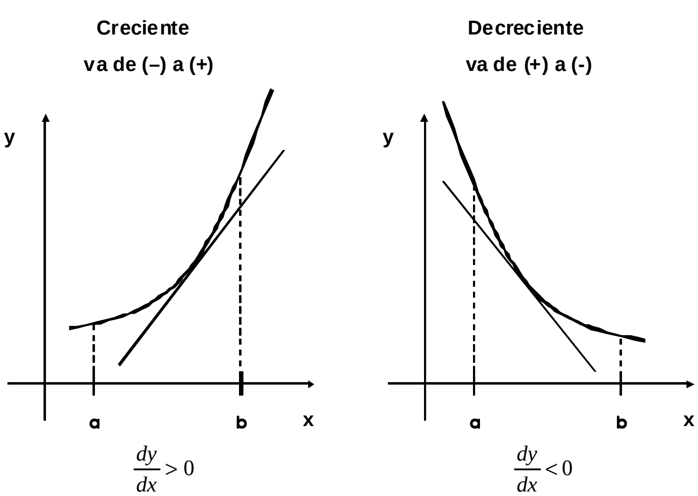
IV.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Función creciente

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo (a,b). Si se cumple que $\frac{dy}{dx} > 0$, la función es creciente.

Función decreciente

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo (a,b). Si se cumple que $\frac{dy}{dx} < 0$, la función es decreciente.



Criterio de la primera derivada

Si la derivada de una función es cero, se tiene un *punto critico* (PC) y existen dos casos:

1. Si pasa de signo (+) a (-), la función tiene un *máximo relativo*.
2. Si pasa de signo (-) a (+), la función tiene un *mínimo relativo*.

El máximo más grande se denomina *máximo absoluto*. El mínimo más pequeño se denomina *mínimo absoluto*.

Si $\frac{dy}{dx}$ no cambia de signo, la derivada no tiene ni máximo ni mínimo.

Criterio de la segunda derivada

- Si $\frac{dy}{dx}=0$ y $\frac{d^2y}{dx^2}<0$, la función $y=f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto en cuestión.
- Si $\frac{dy}{dx}=0$ y $\frac{d^2y}{dx^2}>0$, la función $y=f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto en cuestión.

Concavidad

Un arco de curva $y=f(x)$ es *cóncavo*, si cada uno de sus puntos están situados por encima de la tangente. Como la pendiente aumenta: $\frac{d^2y}{dx^2}>0$

Convexidad

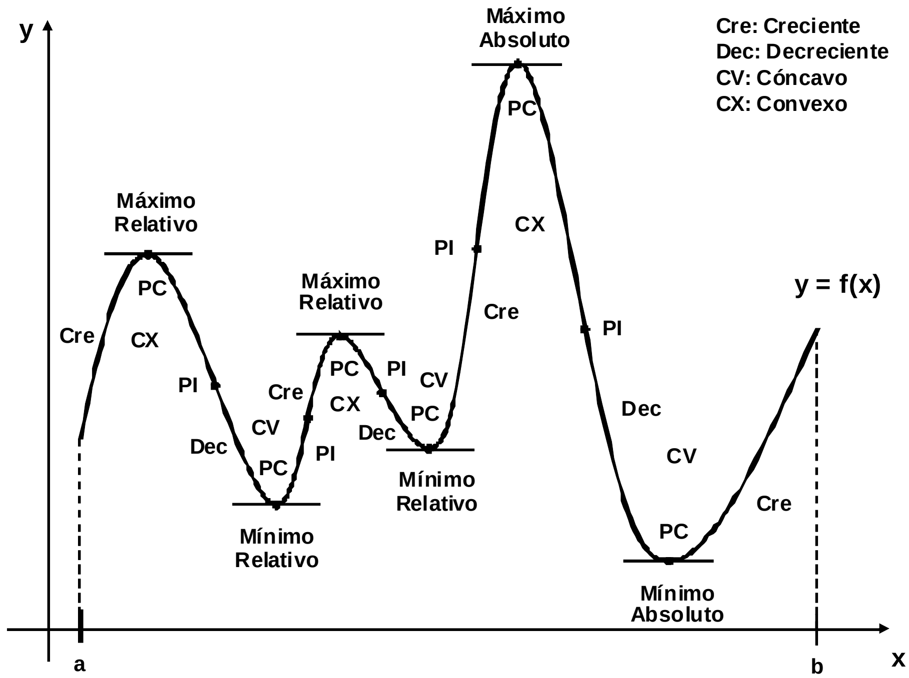
Un arco de curva $y=f(x)$ es *convexo*, si cada uno de sus puntos están situados por debajo de la tangente. Como la pendiente disminuye: $\frac{d^2y}{dx^2}<0$

Punto de inflexión (PI)

Es el punto en el cual la curva pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava. Una curva tiene punto de inflexión en x_1 si:

i. $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_1}=0$

ii. $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=x_1}\neq 0$, es decir, que existe su tercera derivada.



Ejemplos.

Dadas las siguientes funciones obtener (en caso de aplicar):

a) puntos críticos, sus máximos y mínimos; b) ubicar donde son crecientes y donde decrecientes; c) determinar donde son cóncavas, donde convexas y establecer sus puntos de inflexión; d) trazar la gráfica en el intervalo dado.

1) $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ en el intervalo $0 \le x \le 5$

Solución.

$$\frac{df(x)}{dx} = -2x + 6$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$-2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$f(3) = -(3)^2 + 6(3) + 7 = -9 + 18 + 7 = 16$$

$$\therefore \quad PC(3,16)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0$ por lo tanto es un máximo y su forma es convexa. Eso implica que en $0 \le x < 3$, la función es creciente y en $3 < x \le 5$ es decreciente.

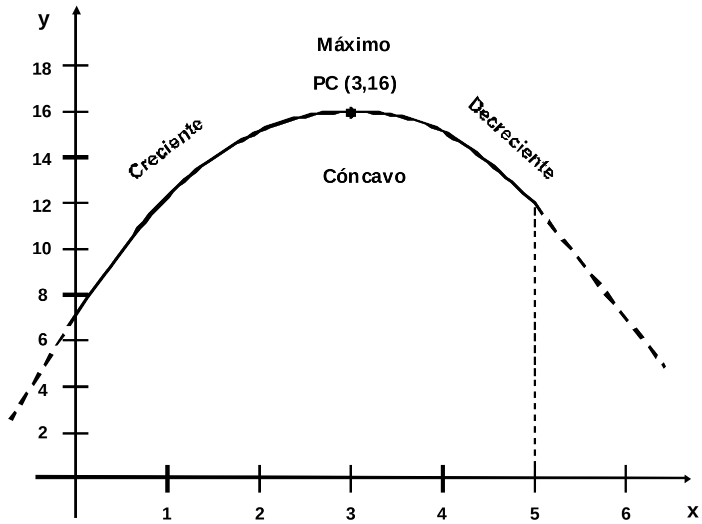
$\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$, por lo tanto, no existen puntos de inflexión.

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(0) = -(0)^2 + 6(0) + 7 = 0 + 0 + 7 = 7 \quad \Rightarrow \quad P(0,7)$$

$$f(5) = -(5)^2 + 6(5) + 7 = -25 + 30 + 7 = 12 \quad \Rightarrow \quad P(5,12)$$

Trazando la gráfica:



2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ en el intervalo $-2 \le x \le 4$

Solución.

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 6x$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$3x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(3x-6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0; \quad 3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{3} = 2$$

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 0 - 0 + 4 = 4$$

$$\therefore \quad PC_1(0,4)$$

$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$$

$$\therefore \quad PC_2(2,0)$$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$$

$$6x - 6\big|_{x=0} = 6(0) - 6 = -6 < 0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

$$6x - 6\big|_{x=2} = 6(2) - 6 = 12 - 6 = 6 > 0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

Eso implica que en $-2 \le x < 0$, la función es creciente, en $0 < x \le 2$ es decreciente y en $2 < x \le 4$ es creciente.

$\frac{d^3y}{dx^3} \ne 0$, por lo tanto, sí existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{6} = 1$$

$f(1)=(1)^3-3(1)^2+4=1-3+4=2$

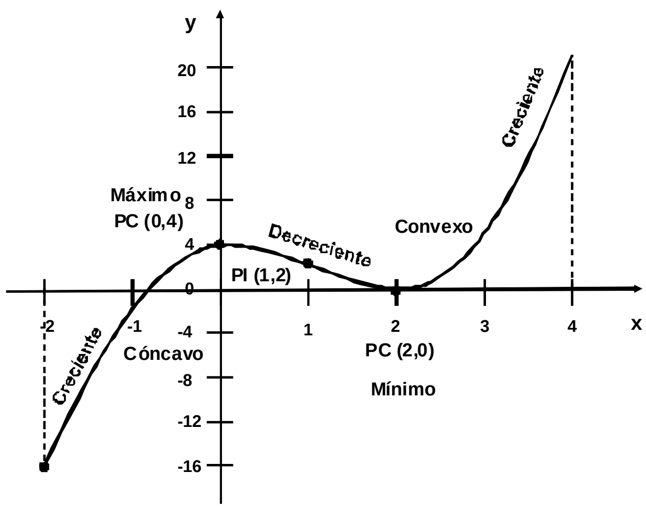
$\therefore \quad PI(1,2)$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2+4=-8-12+4=-16$

$f(4)=(4)^3-3(4)^2+4=64-48+4=20$

Trazando la gráfica:



3) $f(x)=x^4-2x^2+1$ en el intervalo $-1.5\le x\le 1.5$

Solución.

$$\frac{df(x)}{dx}=4x^3-4x$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$4x^3-4x=0 \quad\Rightarrow\quad x(4x^2-4)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0; \quad 4x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{4}{4} \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1}$$

$\therefore \quad x_2=1; \quad x_3=-1$

$f(0)=(0)^4-2(0)^2+1=0-0+1=1$

$\therefore \quad PC_1(0,1)$

$f(1)=(1)^4-2(1)^2+1=1-2+1=0$

$\therefore \quad PC_2(1,0)$

$f(-1)=(-1)^4-2(-1)^2+1=1-2+1=0$

$\therefore \quad PC_3(-1,0)$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2-4$$

$$12x^2-4\Big|_{x=0}=12(0)^2-4=-4<0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

$12x^2-4\Big|_{x=1}=12(1)^2-4=12-4=8>0$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

$12x^2-4\Big|_{x=-1}=12(-1)^2-4=12-4=8>0$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

Eso implica que en $-1.5\le x<-1$, la función es decreciente, en $-1<x<0$ es creciente, en $0<x<1$ es decreciente y en $1<x\le 1.5$ es creciente.

$\frac{d^3y}{dx^3}\neq 0$, por lo tanto, sí existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$12x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad 12x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x^2=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$x_2=0.5773;\quad x_3=-0.5773$

$f(0.5773)=(0.5773)^4-2(0.5773)^2+1=0.1111-0.6666+1=0.4444$

$\therefore\quad PI_1(0.5773,0.4444)$

$f(-0.5773)=(-0.5773)^4-2(-0.5773)^2+1=0.1111-0.6666+1=0.4444$

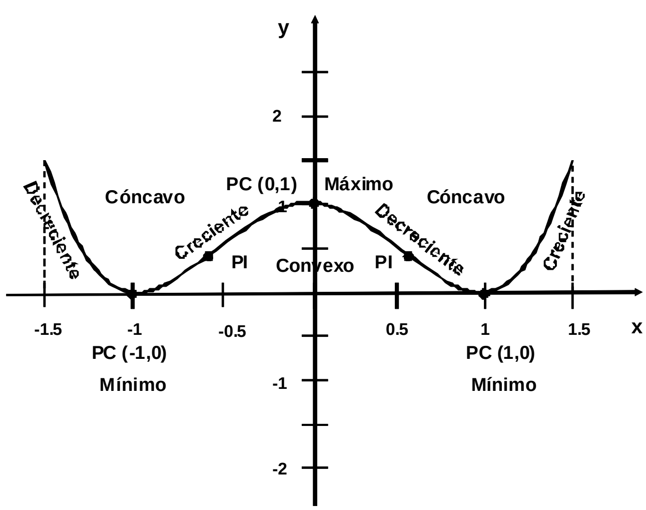
$\therefore\quad PI_2(-0.5773,0.4444)$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$f(-1.5)=(-1.5)^4-2(-1.5)^2+1=5.0625-4.5+1=1.5625$

$f(1.5)=(1.5)^4-2(1.5)^2+1=5.0625-4.5+1=1.5625$

Trazando la gráfica:



4) $f(x)=-x^3+6x^2-9x+8$ en el intervalo $-1\le x\le 5$

Solución.

$$\frac{df(x)}{dx}=-3x^2+12x-9$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$-3x^2+12x-9=0 \quad\Rightarrow\quad 3x^2-12x+9=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-4x+3=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)(x-3)=0$$

$\therefore \quad x_1=1; \quad x_2=3$

$f(1)=-(1)^3+6(1)^2-9(1)+8=-1+6-9+8=4$

$\therefore \quad PC_1(1,4)$

$f(3)=-(3)^3+6(3)^2-9(3)+8=-27+54-27+8=8$

$\therefore \quad PC_2(3,8)$

aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-6x+12$$

$$-6x+12\Big|_{x=1}=-6(1)+12=-6+12=6>0$$

por lo tanto es un mínimo y su forma es cóncava.

$$-6x+12\Big|_{x=3}=-6(3)+12=-18+12=-6\ >0$$

por lo tanto es un máximo y su forma es convexa.

Eso implica que en $-1\le x<1$, la función es decreciente, en $1<x\le 3$ es creciente y en $3<x\le 5$ es decreciente.

$\dfrac{d^3y}{dx^3}\neq 0$, por lo tanto, si existen puntos de inflexión.

igualando a cero la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión:

$$-6x+12=0 \quad\Rightarrow\quad -6x=-12 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-12}{-6}=2$$

$f(2)=-(2)^3+6(2)^2-9(2)+8=-8+24-18+8=6$

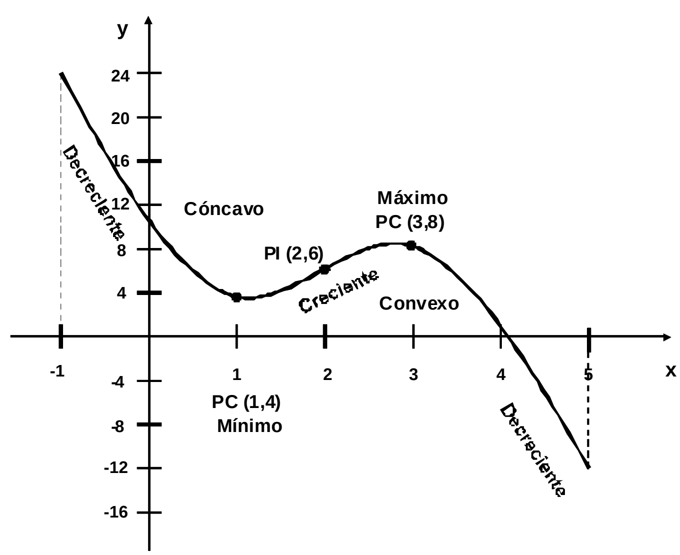
$\therefore \quad PI(2,6)$

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$f(-1)=-(-1)^3+6(-1)^2-9(-1)+8=1+6+9+8=24$

$f(5)=-(5)^3+6(5)^2-9(5)+8=-125+150-45+8=-12$

Trazando la gráfica:



5) $f(x) = x^3 + 3x$ en el intervalo $-3 \le x \le 3$

Solución.

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 3$$

igualando a cero para obtener los puntos críticos:

$$3x^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{3}{3} = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1}$$

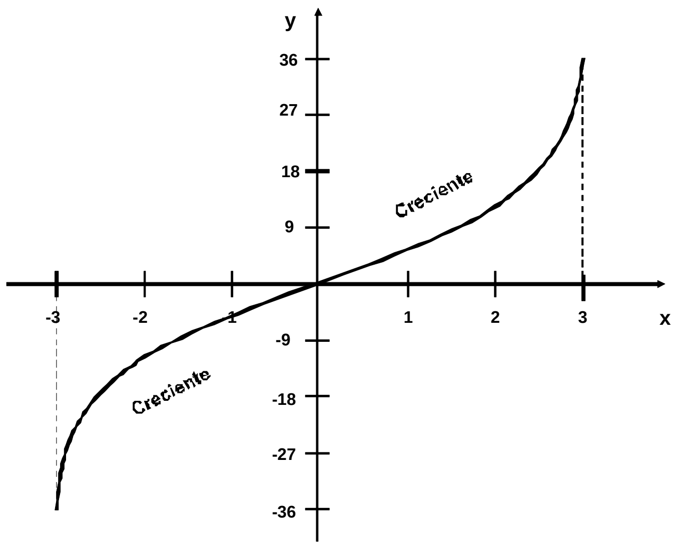
Como no está definido ese valor en los número reales, no se tienen puntos críticos. Eso significa que no hay ni máximos ni mínimos.

Calculando las ordenadas de los puntos extremos:

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3) = -27 - 9 = -36$$

$$f(3) = (3)^3 + 3(3) = 27 + 9 = 36$$

En la siguiente gráfica, se muestra que la función siempre es creciente:



IV.4 TEOREMA DE ROLLE

Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las condiciones siguientes:

i. $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$

ii. $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a,b)

iii. $f(a) = f(b)$

Por lo tanto existe, al menos un valor $x \in (a,b)$, para el cual $f'(x) = 0$

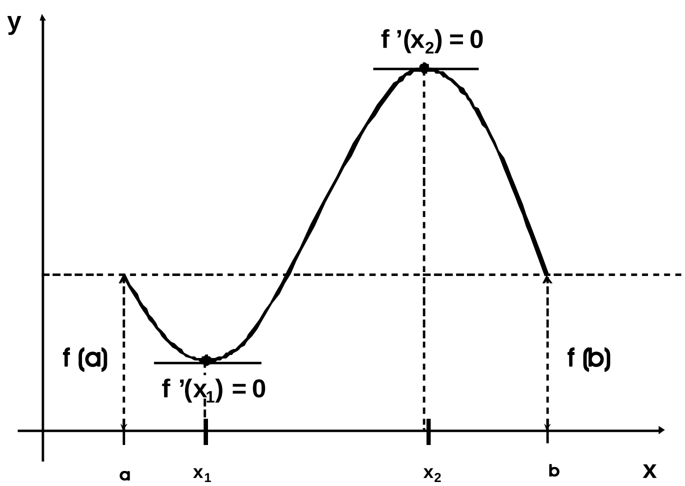
Demostración:

Existen tres casos:

1. Si $f(x) = 0$ en el intervalo (a,b), entonces $f'(x) = 0$, para todo x, y así x puede ser cualquier valor en (a,b).

2. Si $f(x)$ está por encima de $f(a)=f(b)$ en algún punto del intervalo (a,b), entonces en un punto x_2 la función pasa de ser creciente a decreciente. Por definición, el punto donde ocurre eso es un máximo, por lo tanto $f'(x_2)=0$, en dicho intervalo.
3. Si $f(x)$ está por debajo de $f(a)=f(b)$ en algún punto del intervalo (a,b), entonces en un punto x_1 la función pasa de ser decreciente a creciente. Por definición, el punto donde ocurre eso es un mínimo, por lo tanto $f'(x_1)=0$, en dicho intervalo.

Puesto que toda función debe estar en uno de estos tres casos, el teorema queda demostrado.



El teorema establece que por lo menos existe un punto de la gráfica de $y=f(x)$, en el intervalo (a,b) en donde se tiene pendiente cero (tangente paralela al eje x) si sus extremos son de igual altura, $(f(a)=f(b))$.

IV.5 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Si $y=f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b), existe por lo menos un valor $x_1 \in (a,b)$ en que se cumple que:

$$f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Demostración:

La ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q es:

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

construyendo la función $F(x)$ pasando el término del segundo miembro al primero:

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$$

sustituyendo $x = a$ y después $x = b$, se tiene:

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0$$

Se aprecia que $F(x)$ satisface todas las hipótesis del Teorema de Rolle. Por lo tanto debe existir un valor tal que $F'(x_1) = 0$.

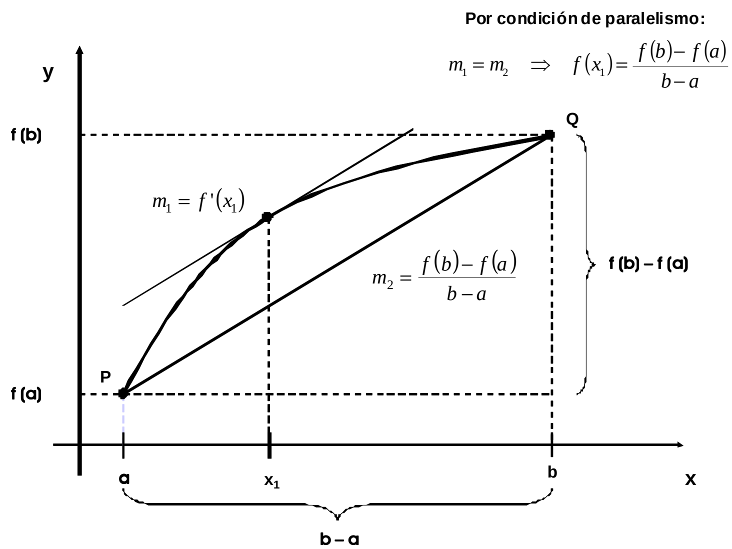
Ahora, derivando $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como $F'(x_1) = 0$, esto implica que:

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

por lo tanto el teorema queda demostrado.



El teorema establece que existe por lo menos un punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva entre los puntos P y Q en la cual la recta tangente a dicha curva es paralela a la secante que pasa por dichos puntos

IV.6 APLICACIONES DE LA DERIVADA EN OTRAS DISCIPLINAS

Muchos de los aspectos de la vida diaria como los de las ciencias y las ingenierías tienen que ver con el cambio de las cosas y, en especial, con el cambio de una variable con relación a otras.

En el estudio del Cálculo Diferencial es primordial el concepto de variación o cambio continuo. En este sentido, la aplicación del concepto de derivada es interdisciplinaria, puesto que hay una gran cantidad de ámbitos en que se puede aplicar la razón de cambio instantánea de una variable con respecto a otra. Por ejemplo, la velocidad de un automóvil representa un cambio de su posición con respecto al tiempo.

A continuación se citan algunas aplicaciones de la derivada que constituyen valiosas herramientas en diversas disciplinas:

MECÁNICA

La velocidad de una partícula es la rapidez con que cambia de posición al transcurrir el tiempo. La *velocidad media* de una partícula que se mueve de una posición inicial x_1 en un instante t_1 a otra posición final x_2 en un instante t_2 viene dada por:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

La velocidad media sólo describe la medida del desplazamiento neto y del tiempo transcurrido. No dice nada acerca de cómo fue el movimiento entre x_1 y x_2: si la trayectoria fue en curva o en recta, o si el movimiento fue continuo o si tuvo interrupciones. La velocidad media se refiere simplemente al desplazamiento total y al tiempo total transcurrido. Por ejemplo, si un automóvil se desplaza 50 kilómetros de una ciudad a otra en media hora, la velocidad media para el viaje fue de 100 kilómetros sobre hora, independientemente de que el velocímetro marcara diferentes velocidades a lo largo del trayecto.

Sin embargo, si una partícula se mueve de tal manera que su velocidad media en gran número de intervalos diferentes no es constante, se dice que la partícula se mueve con velocidad variable. Entonces, para determinar la velocidad de esa partícula en un instante dado se efectúa a partir del concepto de velocidad instantánea:

Si Δx es el desplazamiento en un pequeño intervalo de tiempo Δt, la velocidad en el tiempo t es el valor límite a que tiende $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, cuando Δt tiende a cero. Esto es, la *velocidad instantánea* es:

$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, pero, por definición de derivada, se tiene que:

$$v_i = \frac{dx}{dt}$$

Si la velocidad de una partícula cambia al efectuar un movimiento, entonces se dice que el cuerpo tiene una aceleración. La aceleración de una partícula es la rapidez con que cambia su velocidad al transcurrir el tiempo.

La *aceleración media* durante el movimiento de una partícula de un punto inicial con una velocidad v_1 en un instante t_1 a otra posición final con velocidad v_2 en un instante t_2 viene dada por:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

La aceleración media sólo describe la medida de la velocidad neta y del tiempo transcurrido. No dice nada acerca de cómo fue la variación con el tiempo que le ocurre a la velocidad durante el intervalo Δt. Sólo se conoce el cambio neto de velocidad y el tiempo total transcurrido. Si no hay cambio en la velocidad, la aceleración es cero.

Sin embargo, si una partícula se mueve de tal manera que su aceleración media en gran número de intervalos diferentes no es constante, se dice que la partícula se mueve con aceleración variable. Entonces, para determinar la aceleración de esa partícula en un instante dado se efectúa a partir del concepto de aceleración instantánea:

Si Δv es la velocidad en un pequeño intervalo de tiempo Δt, la aceleración en el tiempo t es el valor límite a que tiende $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, cuando Δt tiende a cero. Esto es, la *aceleración instantánea* es:

$a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, pero por definición de derivada, se tiene que:

$$a_i = \frac{dv}{dt}$$

Ejemplo.
Sea la función $x(t) = t^3 - 3t^2 + 10t + 8$ que define la trayectoria, en metros, de una partícula. Si $t_1 = 5\ s$ y $t_2 = 8\ s.$ Determinar: a) su posición para t_1, b) su posición para t_2, c) su velocidad media entre t_1 y t_2, d) la velocidad instantánea para $t = 6\ s$, e) la aceleración media entre t_1 y t_2, f) la aceleración instantánea para $t = 7\ s.$

Solución.
a) $x(5) = (5)^3 - 3(5)^2 + 10(5) + 8 = 125 - 75 + 50 + 8 = 108\ m$
b) $x(8) = (8)^3 - 3(8)^2 + 10(8) + 8 = 512 - 192 + 80 + 8 = 408\ m$
c) $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{408 - 108}{8 - 5} = \frac{300}{3} = 100\ \frac{m}{s}$
d) $v_i = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 10\Big|_{t=6} = 3(6)^2 - 6(6) + 10 = 108 - 36 + 10 = 82\ \frac{m}{s}$
e) $v_1 = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 10\Big|_{t=5} = 3(5)^2 - 6(5) + 10 = 75 - 30 + 10 = 55\ \frac{m}{s}$
$v_2 = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 10\Big|_{t=8} = 3(8)^2 - 6(8) + 10 = 192 - 48 + 10 = 154\ \frac{m}{s}$
$\therefore\quad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{154 - 55}{8 - 5} = \frac{99}{3} = 33\ \frac{m}{s^2}$
f) $a_i = \frac{dv}{dt} = 6t - 6\Big|_{t=7} = 6(7) - 6 = 42 - 6 = 36\ \frac{m}{s^2}$

La *cantidad de movimiento* de una partícula se define como el producto de su masa y su velocidad:

$$p = m \cdot v$$

Newton expresó su segunda ley del movimiento en términos de la cantidad de movimiento así: la rapidez con la cual cambia la cantidad de movimiento de un cuerpo es proporcional a la fuerza resultante que se ejerce sobre el cuerpo. Matemáticamente esto es:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot v) = m\frac{dv}{dt} = m \cdot a$$

Esto significa que la *fuerza* es igual al producto de la masa por la aceleración. En el sistema internacional de unidades, la fuerza se mide en Newtons.

HIDROSTÁTICA

La *presión* P es la magnitud de la fuerza normal que se ejerce por unidad de área de la superficie de un fluido:

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

La presión se transmite a los límites de un fluido perpendicularmente y su unidad es el Pascal.

La variación de la presión respecto de la altura de un fluido en equilibrio estático viene dada por:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho \cdot g$$

Esto significa que conforme aumenta la altura (dy positivo), disminuye la presión (dP negativo).. La causa de esta variación de presión es el peso por unidad de área de sección transversal de las capas del fluido que están entre los puntos cuya diferencia de presión se mide.

La cantidad $\rho \cdot g$ se llama *peso específico* del fluido y representa su peso por unidad de volumen.

TERMODINÁMICA

La relación de la cantidad de calor ΔQ aplicada a un cuerpo con su correspondiente elevación de temperatura ΔT, se llama *capacidad calorífica* C del cuerpo, esto es:

$$C = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{dQ}{dT}$$

La capacidad calorífica de un cuerpo por unidad de masa, que se conoce como *calor específico* c, es característica del material de que está compuesto el cuerpo:

$$c = \frac{Capacidad\ calorífica}{masa} = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}$$

La expresiones anteriores, reconocen que ni la capacidad calorífica de un cuerpo (medida en $\frac{J}{°K}$) ni el calor específico de un material (medido en $\frac{J}{kg°K}$) son constantes, ya que dependen de la situación del intervalo de temperaturas.

ELECTRICIDAD

Todo cuerpo con electrones capaces de moverse entre los átomos de la red cristalina del mismo se llama conductor. Una de las causas que origina este movimiento es la aplicación al conductor de una diferencia de potencial o voltaje.

Cuando de un punto a otro de un conductor se desplaza una o más cargas eléctricas se dice que circula por él una corriente eléctrica.

En general, la *intensidad de corriente instantánea* i en un circuito es la cantidad de carga que circula por unidad de tiempo. Esto es:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La corriente por un conductor se mide en Amperes.

ÓPTICA

Del flujo radiante, sólo una pequeña fracción se encuentra en el intervalo de longitudes de onda que evoca la sensación visual en el ojo humano[1].

La parte del flujo radiante que afecta al ojo se le conoce como flujo luminoso.

Cuando un flujo luminoso incide sobre una superficie, se dice que está iluminada. Se define como *iluminación* E al flujo luminoso incidente L por unidad de área:

$$E = \frac{dL}{dA}$$

La iluminación se expresa en Luxes.

QUÍMICA

Sea una reacción

$$A + B \rightarrow C$$

donde A y B son los reactivos y C el producto.

La concentración de un reactivo A es el número de moles por litro y se denota por $[A]$. La concentración de un reactivo varía durante una reacción y depende del tiempo.

La *velocidad instantánea de reacción* VIR de concentración del producto $[C]$ está dada por:

$$VIR = \frac{d[C]}{dt}$$

La concentración del producto se incrementa en la medida que la reacción avanza, sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción, por lo tanto:

$$VIR = \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$$

ya que $[A]$ y $[B]$ disminuyen con la misma rapidez con que crece $[C]$.

[1] El rango visual de longitud de onda está en el rango de $400\ m\mu$ a $700\ m\mu$.

BIOLOGÍA

Si n es el número de individuos de una población o colonia de seres vivos, la función $n = f(t)$ denota el comportamiento del crecimiento en función del tiempo. Para un periodo de tiempo, se define como la *tasa promedio de crecimiento* TPC, a la relación:

$$TPC = \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

La *tasa instantánea de crecimiento* TIC, se obtiene si el periodo Δt tiende a cero

$$TIC = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Esta expresión mide la rapidez con que crece o disminuye una población de seres bajo observación, para un momento específico.

PSICOLOGÍA

En la teoría del aprendizaje, es muy útil determinar el rendimiento de una persona al paso del tiempo. Si $R = f(t)$ representa la función de rendimiento que presenta un individuo para adquirir un conocimiento o dominar una habilidad en un tiempo de capacitación t, entonces la expresión:

$$\frac{dR}{dt}$$

mide la razón de mejora del aprendizaje a medida que transcurre el tiempo. Esto es útil para identificar a personas con problemas y facilita la aplicación del tratamiento conducente.

ECONOMÍA

Sea $C = f(x)$ la función de costo que una compañía incurre al producir x unidades de un cierto artículo o proveer cierto servicio.

El *costo marginal* se define como la razón instantánea de cambio del costo respecto al número de artículos producidos o de bienes ofrecidos:

$$C_{mg} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

El costo marginal representa el costo de producir un artículo adicional de las normalmente producidas.

Para fines prácticos, la función de costo se modela a través de una función polinomial de la forma:

$$C(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

donde el término a_0 representa los costos fijos (rentas de los bienes, mantenimientos, etc.) y los demás términos representan los costos variables (gasto en los insumos, sueldos de los trabajadores, etc.). Si se deriva esta función, se observa que el costo marginal sólo depende de los costos variables, es decir, la capacidad instalada no influye en el costo de incrementar la producción.

IV.7 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

En problemas de aplicación de derivadas, el objetivo es calcular la razón de cambio de las cantidades en términos de otra que puede medirse más fácilmente a través del establecimiento de una ecuación que relacione las dos cantidades involucradas mediante la aplicación de la regla de la cadena.

Para todo fin práctico, la metodología sugerida para resolver problemas es la siguiente:

1. Leer cuidadosamente el problema.
2. Esbozar un dibujo que refleje el contenido del problema.
3. Definir las variables y asignar la simbología.
4. Determinar las cantidades que tengan razones de variación, expresarlas en forma de derivadas e identificar la incógnita.
5. Establecer una ecuación que relacione todas las cantidades del problema aplicando los aspectos geométricos.
6. Aplicar la regla de la cadena.
7. Sustituir la información y resolver para la razón buscada.

Ejemplos.

1) A un globo esférico se le bombea aire de forma que su volumen aumenta a razón de $200\,\frac{cm^3}{s}$, ¿con qué rapidez crece el radio del globo cuando su diámetro es de $30\,cm$?

Solución.

Interpretando los datos: $\frac{dV}{dt}=200\,\frac{cm^3}{s}$, $D=30\,cm \quad \Rightarrow \quad r=15cm$

El volumen de un globo es: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Derivando: $\frac{dV}{dr}=\frac{12}{3}\pi r^2=4\pi r^2$

La razón buscada es: $\frac{dr}{dt}$

Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

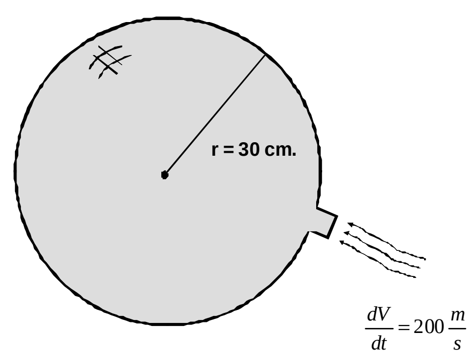
$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$

Sustituyendo:

$$200\,\frac{cm^3}{s}=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}$$

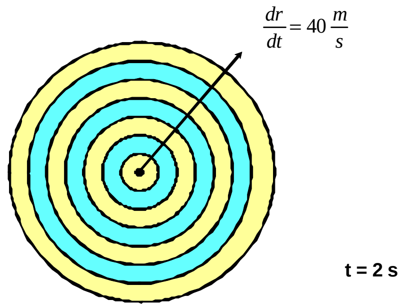
despejando $\frac{dr}{dt}$ y sustituyendo r:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{200\,\frac{cm^3}{s}}{4\pi(15\,cm)^2}=0.0707\,\frac{cm}{s}.$$



2) Se deja caer una piedra en un lago que crea una onda circular que se desplaza con una velocidad de $40\ \frac{cm}{s}$. Hallar la razón a la cual aumenta el área dentro del círculo después de 2 segundos.

Solución.



Interpretando los datos: $\frac{dr}{dt} = 40\ \frac{cm}{s}$, $t_1 = 2\ s$

El área de un circunferencia es: $A = \pi r^2$

Derivando: $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

La razón buscada es: $\frac{dA}{dt}$

Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

Para $t = 2\ s$:

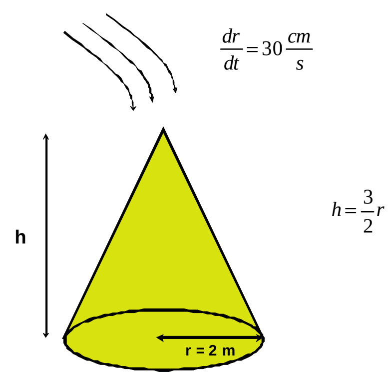
$$r = 40\ \frac{cm}{s}(2\ s) = 80\ cm$$

Sustituyendo:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(0.80\ m)\left(0.40\ \frac{m}{s}\right) = 2.0106\ \frac{m^2}{s}.$$

3) En una construcción, un camión vierte arena y se forma un montículo de forma cónica, cuya altura es igual a los $\frac{3}{2}$ del radio de la base. Obtener el incremento del volumen por unidad de tiempo cuando el radio de la base es igual a 2 metros, sabiendo que el radio se incrementa a razón de 30 centímetros. cada segundo.

Solución.



Interpretando los datos: $h = \frac{3}{2}r$,

$r_1 = 30$, $\frac{dr}{dt} = 30\ \frac{cm}{s}$

El volumen de un cono es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\left(\frac{3}{2}r\right) = \frac{1}{2}\pi r^3$$

Derivando: $\frac{dV}{dr} = \frac{3}{2}\pi r^2$

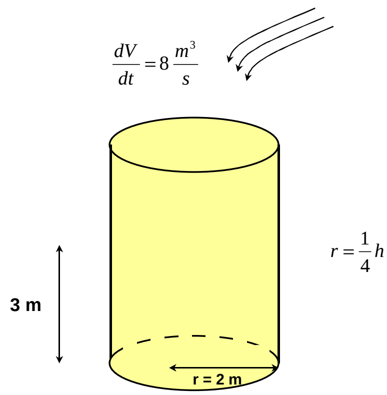
La razón buscada es: $\frac{dV}{dt}$

Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$
sustituyendo:
$$\frac{dV}{dt}=\frac{3}{2}\pi(2)^2(0.30)=5.6548\ \frac{m^3}{s}$$

4) Se vierte gasolina en un tanque cilíndrico a razón de $8\frac{m}{s}$. Si el radio es la cuarta parte de la altura, ¿a qué velocidad sube el nivel de gasolina cuando $h=3\ m$?

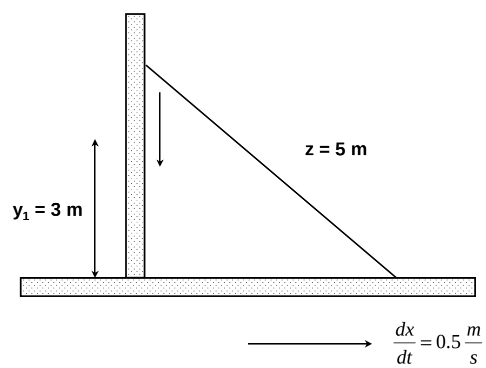
Solución.



Interpretando los datos: $\frac{dV}{dt}=8\ \frac{m}{s}$, $r=\frac{h}{4}$, $h=3\ m$
El volumen de un cilindro es:
$$V=\pi r^2h=\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2h=\frac{1}{16}\pi h^3$$
Derivando: $\frac{dV}{dh}=\frac{3}{16}\pi h^2$
La razón buscada es: $\frac{dh}{dt}$
Relacionando las expresiones aplicando la regla de la cadena:
$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$
despejando $\frac{dh}{dt}$ y sustituyendo:
$$\frac{dh}{dt}=\frac{8}{\frac{3}{16}\pi(3)^2}=1.5090\ \frac{m}{s}$$

5) Una escalera de 5 metros de largo está apoyada contra una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera resbala alejándose de la pared a razón de 0.5 $\frac{m}{s}$, ¿con qué rapidez resbala hacia abajo su extremo superior cuando este extremo está a 3 metros de la pared?

Solución.



Interpretando los datos: $z=5\ m$,
$\frac{dx}{dt}=0.5\ \frac{cm}{s}$, $y_1=3$
La razón buscada es: $\frac{dy}{dt}$
Aplicando el teorema de Pitágoras:
$$x^2+y^2=5^2$$
Derivando con respecto a t:

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(25) = 0$$

Despejando $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2x \cdot \frac{dx}{dt}}{2y} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} =$$

Obteniendo x cuando $y_1 = 3$

$$x = \sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4\ m$$

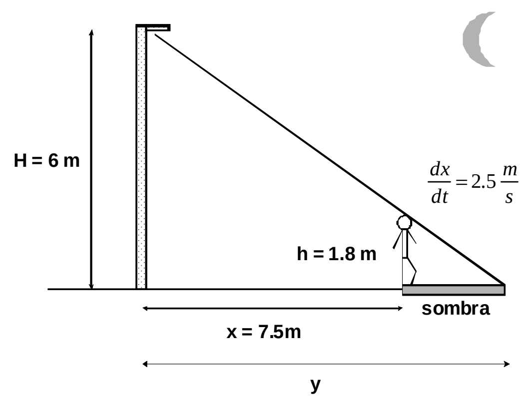
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}(0.5) = -0.66\ \frac{m}{s}$$

el signo negativo significa que la escalera pierde altura.

6) Una persona de 1.8 metros de estatura camina en la noche en línea recta a una velocidad de 2.5 $\frac{m}{s}$. Si pasa a junto a un arbotante de 6 metros de altura, obtener la velocidad del extremo de la sombra que se genera sobre la calle después de 3 segundos.

Solución.

Interpretando los datos:



$$\frac{dx}{dt} = 2.5\ \frac{m}{s},\quad H = 6\ m,\quad h = 1.8\ m,\quad t = 3\ s$$

$$x = 2.5\ \frac{m}{s}(3\ s) = 7.5\ m$$

La razón buscada es: $\frac{dy}{dt}$

Aplicando el concepto de semejanza de triángulos:

$$\frac{H}{y} = \frac{h}{y - x}$$

Despejando y:

$$y - x = \frac{h}{H} y \quad \Rightarrow \quad y - \frac{h}{H} y = x \quad \Rightarrow \quad y\left(1 - \frac{h}{H}\right) = x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{1 - \frac{h}{H}}$$

Derivando con respecto a t:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}}{1 - \frac{h}{H}}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{7.5\ m}{1 - \frac{1.8\ m}{6\ m}} = 10.71\ \frac{m}{s}$$

IV.8 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Una de las aplicaciones con mayor trascendencia del Cálculo Diferencial son aquellos problemas de optimización, cuyo objetivo es determinar los mejores resultados posibles.

A través de las derivadas se pueden resolver de manera sencilla y rápida muchos problemas que se presentan tanto en Matemáticas como en otras disciplinas científicas. Para optimizar una función, se deben encontrar sus valores *máximos* y *mínimos* y darles su apropiada interpretación. Por ejemplo se busca minimizar los costos de una producción determinada; encontrar la forma adecuada para comercializar un producto, etc.

La metodología para resolver problemas de aplicación es la siguiente:

1. Leer cuidadosamente el problema
2. Cuando sea conveniente, hacer un dibujo
3. Identificar con letras cada una de las cantidades que intervienen
4. Seleccionar la variable que se debe optimizar y expresarla en función de otras variables
5. Eliminar todas las variables exceptuando una, para poder obtener una función en una sola variable.
6. Derivar para obtener la cantidad optimizada
7. Sustituir ese valor para encontrar las demás cantidades buscadas.

Ejemplos.

1) Encontrar dos números cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.
Solución:
Sea x un número y $20-x$ el otro.

$$P = x(20-x) = 20x - x^2$$

$$\frac{dP}{dx} = 20 - 2x$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2 \quad \text{(por lo tanto, es máximo)}$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = -20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-20}{-2} = 10$$

$$20 - x = 20 - 10 = 10$$

Los números buscados son $10 \ y \ 10$.

2) Hallar dos números diferentes cuyo producto sea 16 y la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima.
Solución.

$$xy = 16 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16}{x}$$

$$S = x + y^2 = x + \left(\frac{16}{x}\right)^2 = x + \frac{256}{x^2}$$

$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{512}{x^3}$$

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{1536}{x^4} \quad \text{(por lo tanto, es mínimo)}$$

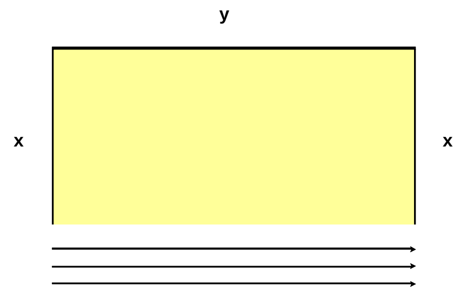
$$\frac{dS}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad 1-\frac{512}{x^3}=0 \quad\Rightarrow\quad 1=\frac{512}{x^3} \quad\Rightarrow\quad x^3=512 \quad\Rightarrow\quad x=\sqrt[3]{512}=8$$

$$y=\frac{16}{x}=\frac{16}{8}=2$$

Los números buscados son $8\ y\ 2$.

3) Una persona posee 2400 metros de malla y desea cercar un terreno rectangular que está sobre un río. Si no necesita cercar al río, ¿cuáles son las dimensiones del terreno que posee el área más grande para así optimizar su malla?

Solución.



$$Área = xy$$

$$Longitud = 2x + y = 2400$$

$$y = 2400 - 2x$$

$$A = x(2400-2x) = 2400x - 2x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 2400 - 4x$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -4$$ (por lo tanto, es máximo)

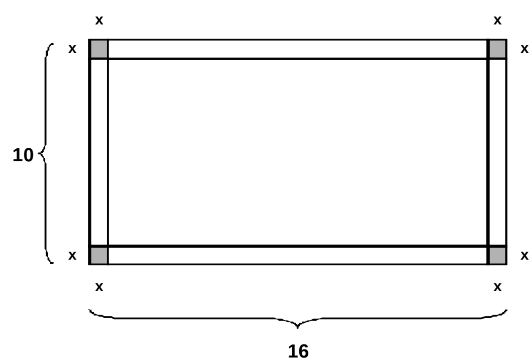
$$\frac{dA}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad 2400-4x=0 \quad\Rightarrow\quad -4x=-2400 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-2400}{-4}=600$$

$$y = 2400-2x = 2400-2(600) = 2400-1200 = 1200$$

Las dimensiones de la malla deben ser: $600\ m$ de profundidad y $1200\ m$ de ancho.

4) Se desea construir una caja rectangular de cartón sin tapa. Si a un cartón de 10 x 16 cm se le hace una corte cuadrado en cada esquina y se doblan los bordes por las líneas punteadas. Cuál debe se el tamaño de los cuadrados recortados para maximizar el volumen?

Solución.



La longitud de la base es: $16-2x$

La anchura de la base es: $10-2x$

La altura de la caja es: x

$$Volumen = (16-2x)(10-2x)x$$
$$= \left(160-32x-20x+4x^2\right)x$$
$$= 160x - 32x^2 - 20x^2 + 4x^3$$

$$V = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 104x + 160$$

$$\frac{dV}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad 12x^2-104x+160=0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{-(-104)\pm\sqrt{104^2-4(12)(160)}}{2(12)}=\frac{104\pm 56}{24}$$

$$\Rightarrow\quad x_1=\frac{160}{24}=6.66;\quad x_2=\frac{48}{24}=2$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 104$$

$$24x - 104\Big|_{x=6.66} = 24(6.66) - 104 = 160 - 104 = 56 > 0$$

por lo tanto es un mínimo.

$$24x - 104\Big|_{x=2} = 24(2) - 104 = 48 - 104 = -56 < 0$$

por lo tanto es un máximo.

Se toma el valor que es máximo, es decir, los cuadrados recortados para maximizar el volumen deben medir $2\ cm$.

5) Se desea producir una lata que contenga un litro de leche. Determinar las dimensiones que minimizan el costo del metal para fabricar la lata.

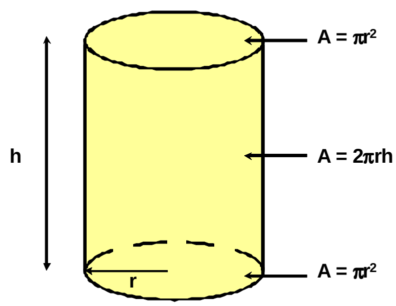
Solución.

El área total de la lata es igual a la suma de las áreas de la base, la tapa y los lados:

$$Área = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$Volumen = \pi r^2 h = 1000\ cm^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$



sustituyendo en el área:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^3 - 2000 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{2000}{4\pi}} = 5.41\,cm$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi (5.41)^2} = 10.82\ cm$$

$$4\pi + \frac{4000}{r^3}\Bigg|_{x=5.41} = 4\pi + \frac{4000}{5.41^3} = 12.56 + 25.13 = 37.69 > 0$$ (por lo tanto, es mínimo)

La lata debe tener: $5.41\,cm$ de radio y $10.82\,cm$ de altura (es decir $2r$).

6) Cuando un avión que viene del puerto de Veracruz desplazándose a velocidad constante de $950\,\frac{km}{hr}$ y está a $250\,km$ de la ciudad de México, otro avión sale de la ciudad de México rumbo a Acapulco con velocidad constante de $600\,\frac{km}{hr}$. Si las trayectorias son perpendiculares, calcular el tiempo que transcurrirá hasta que la distancia que los separe sea mínima.

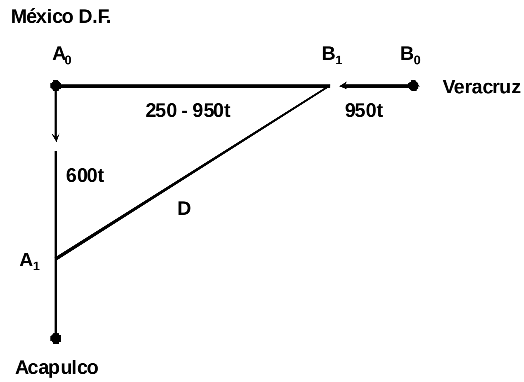
Solución.

La posición del avión que viene de Veracruz en el instante inicial es A_0

La posición del avión que va a Acapulco en el instante inicial es B_0

La posición del avión que viene de Veracruz t horas más tarde es A_1

La posición del avión que va a Acapulco t horas más tarde es B_1



Aplicando el teorema de Pitágoras y sabiendo que $distancia = velocidad \cdot tiempo$, la distancia D entre los aviones es:

$$D^2 = (600t)^2 + (250-950t)^2$$

derivando implícitamente con respecto a t:

$$2D\frac{dD}{dt} = 2(600t)600 + 2(250-950t)(-950) = 720{,}000t - 475{,}000 + 1'805{,}000t$$

$$2D\frac{dD}{dt} = 2'525{,}000t - 475{,}000$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dD}{dt} = \frac{2'525{,}000t - 475{,}000}{2D} = \frac{1'262{,}500t - 237{,}500}{D}$$

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1'262{,}500t - 237{,}500}{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1'262{,}500t - 237{,}500 = 0$$

$$t = \frac{237{,}500}{1'262{,}500} = 0.188\ hrs \approx 11.28 \min$$

$$\left.\frac{1'262{,}500t - 237{,}500}{D}\right|_{t=0} = \frac{1'262{,}500(0) - 237{,}500}{D} = -\frac{237{,}500}{D}$$

$$\left.\frac{1'262{,}500t - 237{,}500}{D}\right|_{t=1} = \frac{1'262{,}500(1) - 237{,}500}{D} = \frac{1'025{,}000}{D}$$

como D siempre es positiva, la función pasa de decreciente a creciente, por lo tanto es un mínimo.
El tiempo que transcurre para que la distancia sea mínima es de aproximadamente $11 \min$.
sustituyendo:

$$D^2 = (600(0.188))^2 + (250 - 950(0.188))^2 = 12{,}723.84 + 5{,}097.96 = 17{,}821.80$$

$$D = \sqrt{17{,}821.80} = 133.49\ km.$$

IV.9 FORMAS INDETERMINADAS

Si en el proceso de calcular el límite de un cociente de funciones del tipo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

se presentan los siguientes casos:

- si $\lim_{x\to a} f(x) \to 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) \to 0$, se tiene una *forma indeterminada* del tipo: $\frac{0}{0}$
- si $\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) \to \infty$, se tiene una *forma indeterminada* del tipo: $\frac{\infty}{\infty}$

Para resolver el límite se puede efectuar mediante el siguiente procedimiento:

REGLA DE L'HOPITAL

La regla de L'Hopital establece que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas:

- Forma $\frac{0}{0}$:

Sea $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- Forma $\frac{\infty}{\infty}$:

Sea $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

La regla de L'Hopital debe aplicarse tantas veces como sea necesario, hasta que se elimine la indeterminación.

Ejemplos.
Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hopital:

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

sustituyendo:

$$\frac{(2)^2+2-6}{(2)^2-4} = \frac{4+2-6}{4-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2+x-6\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2-4\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{2x} = \frac{2(2)+1}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

2) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^2+8x+3}{x^2+7}$

sustituyendo:

$$\frac{5(\infty)^2+8(\infty)+3}{(\infty)^2+7} = \frac{\infty+\infty+3}{\infty+7} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x+3}{x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(5x^2+8x+3\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2+7\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+8}{2x}=\frac{10(\infty)+8}{2(\infty)}=\frac{\infty+8}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x+3}{x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(10x+8)}{\frac{d}{dx}(2x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{2}=5$$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}$

sustituyendo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2)^3-(2)^2-(2)-2}{(2)^3-3(2)^2+3(2)-2}=\frac{8-4-2-2}{8-12+6-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^3-x^2-x-2\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^3-3x^2+3x-2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}$$

$$=\frac{3(2)^2-2(2)-1}{3(2)^2-6(2)+3}=\frac{12-4-1}{12-12+3}=\frac{7}{3}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}$

sustituyendo:

$$\frac{sen(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(sen\,x)}{\frac{d}{dx}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+sen\,3x}{x-sen\,3x}$

sustituyendo:

$$\frac{0+sen\,3(0)}{0-sen\,3(0)}=\frac{0+0}{0-0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+sen\,3x}{x-sen\,3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(x+sen\,3x)}{\frac{d}{dx}(x-sen\,3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3\cos 3x}{1-3\cos 3x}=\frac{1+3(1)}{1-3(1)}=\frac{1+3}{1-3}=\frac{4}{-2}=-2$$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

sustituyendo:

$$\frac{\ln(1)}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

sustituyendo:

$$\frac{\ln(\infty)}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1}=\frac{0}{1}=0$$

8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x^2-9}$

sustituyendo:

$$\frac{3^4-81}{3^2-9}=\frac{81-81}{9-9}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{d}{dx}(x^4-81)}{\frac{d}{dx}(x^2-9)}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{2x}=\frac{4(3)^3}{2(3)}=\frac{4(27)}{6}=\frac{108}{6}=18$$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}$

el limite puede rescribirse como:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}$$

sustituyendo:

$$\frac{\infty^2}{e^{(\infty)^2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(x^2)}{\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}}=\frac{2(\infty)}{2(\infty)e^{(\infty)^2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(2x)}{\frac{d}{dx}\left(2xe^{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x\left(2xe^{x^2}\right)+e^{x^2}(2)}=\frac{2}{2(\infty)\left(2(\infty)e^{(\infty)^2}\right)+e^{(\infty)^2}(2)}=\frac{2}{\infty+\infty}=0$$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

sustituyendo:

$$\frac{\tan(0)-0}{0^3}=\frac{0-0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\tan x-x)}{\frac{d}{dx}\left(x^3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sec^2 x-1\right)}{\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\cdot\tan x}{6x}=\frac{2(1)^2(0)}{6(0)}=\frac{0}{0}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(2\sec^2 x\cdot\tan x\right)}{\frac{d}{dx}(6x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\cdot\sec^2 x+\tan x\left(4\sec^2 x\cdot\tan x\right)}{6}$$

$$=\frac{2(1)^2(1)^2+0(4(1)(1))}{6}=\frac{2+0}{6}=\frac{2}{6}$$

11) $\lim_{x\to\infty}\frac{5e^{4x}}{4x^2}$

sustituyendo:

$$\frac{5e^{4(\infty)}}{4(\infty)^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5e^{4x}}{4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(5e^{4x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(4x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{20e^{4x}}{8x}=\frac{20e^{4(\infty)}}{8(\infty)}=\frac{\infty}{\infty}$$

derivando una vez más:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5e^{4x}}{4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(20e^{4x}\right)}{\frac{d}{dx}(8x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{80e^{4x}}{8}=\frac{80e^{4(\infty)}}{8}=\frac{\infty}{8}=\infty$$

en este ejemplo se demuestra que no todos los límites existen a pesar de la aplicación de esta regla.

12) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

sustituyendo: $\dfrac{\ln(\infty)}{\frac{1}{\infty}}=\dfrac{\infty}{0}$. No aplica la regla de L'Hopital.

IV.10 DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL

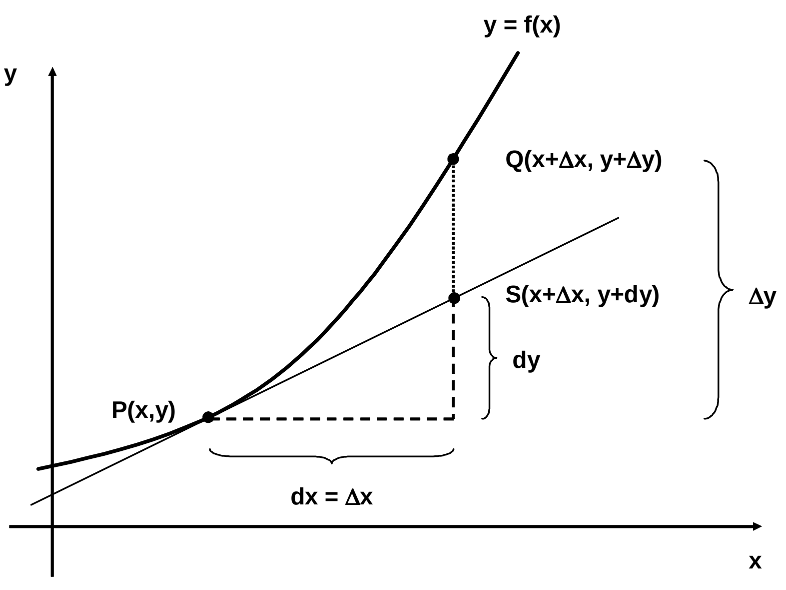
Sea una función $y=f(x)$.

Se define como la *diferencial de la variable independiente* a: $dx=\Delta x$
Se define como la *diferencial de la variable dependiente* a: $dy=f'(x)\cdot dx$

Esto significa que la diferencial de la variable x es por definición igual al incremento que experimenta, sin embargo, la diferencial de la variable y no es igual su incremento:

$$dx=\Delta x$$
$$dy\neq\Delta y$$

Sea una función $y=f(x)$. Dado un punto P de abscisa x, si se le dota de un incremento Δx, se tendrá otro punto Q de abscisa $x+\Delta x$. Ahora, si se traza la tangente a la curva en el punto $P(x,y)$, y desde $x+\Delta x$ se levanta una paralela al eje de ordenadas hasta cortar a la curva y a la tangente, se aprecia claramente como la diferencial dy y el incremento Δy no son iguales.

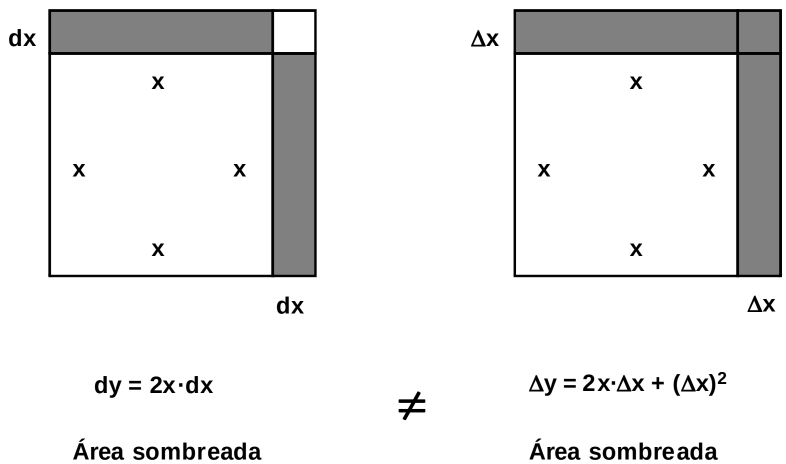


Ejemplo.

Obtener la diferencial dy de la función $y = 4x^2 - 6x + 5$.
Solución:
$dy = (8x - 6)dx$

Ejemplo.
Sea $y = x^2$, comprobar que $dy \neq \Delta y$.

Solución:
Obteniendo la diferencial de y: $dy = 2x \cdot dx$
Obteniendo el incremento de y: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$
Comparando ambos resultados, se observa como $dy \neq \Delta y$.
Si se traza una figura, lo anterior se comprueba:



IV.11 PROPIEDADES DE LA DIFERENCIAL

1) La diferencial de una función en un punto depende de dos variables: el punto x elegido y el incremento Δx que se ha tomado.

2) Al ser $dy = f'(x) \cdot dx$, la diferencial de una función en un punto es el incremento de la ordenada de la tangente al aumentar en Δx un punto de abscisa x.

3) Si se considera la función $y = f(x)$, se tiene que: $dy = f'(x) \cdot dx$, y pasando dx al primer miembro:
$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Por lo tanto, se puede establecer que la *derivada* es un *cociente de diferenciales*: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

4) Puesto que $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, de la noción de límite se deduce que cuando Δx es infinitamente pequeño, el cociente $\frac{dy}{dx}$ es prácticamente igual a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, y puesto que $dx=\Delta x$, dy es prácticamente igual a $f(x+\Delta x)-f(x)$, es decir, que $dy\approx\Delta y$. Esta propiedad permite sustituir dy por Δy cuando Δx es muy pequeño, con la seguridad de que el error cometido será mínimo.

IV.12 CÁLCULO DE DIFERENCIALES

Para efectuar el cálculo de la diferencial general dy de una función $y=f(x)$, basta con aplicar las fórmulas de derivación y después multiplicar el resultado por dx.

Ejemplos.
Obtener la diferencial dy de las siguientes funciones:

1) $y=-4x^3+10x^2-5x+7$

$dy=\left(-12x^2+20x-5\right)dx$

2) $y=\frac{9}{x^3}$

$y=9x^{-3}$

$dy=-27x^{-4}\,dx=-\frac{27}{x^4}dx$

3) $y=\sqrt[4]{\left(8x^3\right)^7}$

$y=\left(8x^3\right)^{\frac{7}{4}}$

$dy=\frac{7}{4}\left(8x^3\right)^{\frac{3}{4}}\left(24x^2\right)dx=42x^2\sqrt[4]{8x^3}\,dx$

4) $y=4sen5x^3$

$dy=4\left(15x^2\right)\cos 5x^3\,dx=60x^2\cos 5x^3\,dx$

5) $y=6x^2e^{4x}$

$dy=\left(6x^2\left(4e^{4x}\right)+e^{4x}(12x)\right)dx$

6) $y=7\cos^{-1}9x$

$dy=-\frac{7(9)}{\sqrt{1-(9x)^2}}dx=-\frac{63}{\sqrt{1-81x^2}}dx$

7) $y=\ln\left(12x^5\right)^8$

$y=8\ln 12x^5$

$dy=\frac{8\left(60x^4\right)}{12x^5}dx=\frac{40}{x}dx$

8) $y=\dfrac{6}{\sqrt{11x^4}}$

$y=6\left(11x^4\right)^{-\frac{1}{2}}$

$dy=-\dfrac{6}{2}\left(11x^4\right)^{-\frac{3}{2}}\left(44x^3\right)dx=-\dfrac{132x^3}{\sqrt{\left(11x^4\right)^3}}dx$

9) $y=5x\tan\left(\tan^{-1}4x\right)$

$y=5x(4x)=20x^2$

$dy=40x\,dx$

10) $y=2\csc^5 4x^3$

$dy=-2\left(12x^2\right)\left(5\csc^4 4x^3\right)\csc 4x^3\cot 4x^3\,dx=-120x^2\csc^5 4x^3\cot 4x^3\,dx$

11) $y=\dfrac{5x^3+8x^2-2}{-x^4-6x}$

$dy=\dfrac{\left(-x^4-6x\right)\left(15x^2+16x\right)-\left(5x^3+8x^2-2\right)\left(-4x^3-6\right)}{\left(-x^4-6x\right)^2}dx$

12) $7xy+6x-2y^2-5y^6+4x^3-18=0$

$dy=\dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}dx=\dfrac{-7y-6-12x^2}{7x-4y-30y^5}dx$

13) $y=\dfrac{8}{9-2x^3}$

$y=8\left(9-2x^3\right)^{-1}$

$dy=-8\left(9-2x^3\right)^{-2}\left(-6x^2\right)dx=\dfrac{48x^2}{\left(9-2x^3\right)^2}dx$

14) $y=\log_5\left(13x^3-2\right)$

$dy=\dfrac{5\left(39x^2\right)}{\left(13x^3-2\right)}\log_5 e\,dx=\dfrac{195}{13x^3-2}\log_5 e\,dx$

15) $y=7^{9x^2}$

$dy=(18x)7^{9x^2}\ln 9x^2dx$

Ejemplo.

Obtener d^4y de la función $y=\dfrac{1}{x}$

Considerando que $y=\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$, se aplica de forma reiterada:

$dy=-\dfrac{2}{x^2}dx$; $d^2y=\dfrac{4}{x^3}dx^2$; $d^3y=-\dfrac{12}{x^4}dx^3$; $d^4y=\dfrac{48}{x^5}dx^4$

Ejemplo.
Obtener d^5y de la función $y = sen\,2x$

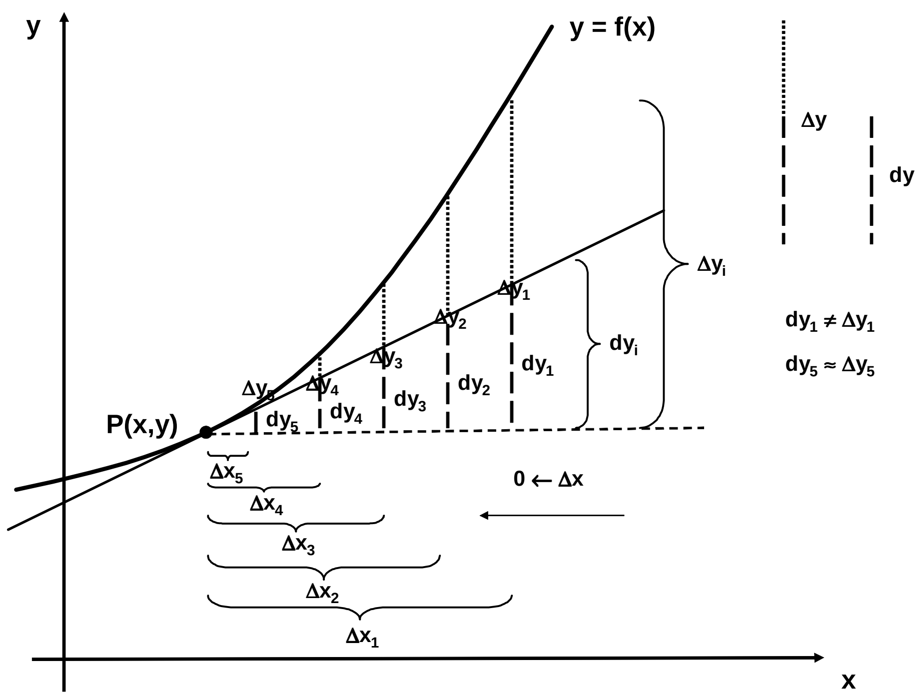
$dy = 2\cos 2x\,dx$; $d^2y = -4sen\,2x\,dx^2$; $d^3y = -8\cos 2x\,dx^3$;
$d^4y = 16sen\,2x\,dx^4$; $d^5y = 32\cos 2x\,dx^5$

IV.13 CÁLCULO APROXIMADO DE INCREMENTOS POR MEDIO DE LA DIFERENCIAL

Se sabe que $dx = \Delta x$. Si ésta es muy pequeña, el valor Δy se aproxima a dy, esto es:

$$dy \approx \Delta x$$

gráficamente esto es:



Para conocer el grado de desviación que existe entre el valor de Δy y el de dy, se aplica el concepto de porcentaje de error $(\%\, e)$, dado por:

$$\%\, e = \left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| \cdot 100$$

y este porcentaje se interpreta de acuerdo al siguiente criterio:

- Si $e < 3\,\%$ el error es muy aceptable
- Si $3\,\% \leq e < 5\,\%$ el error es medianamente aceptable
- Si $e \geq 5\,\%$ el error es inaceptable.

El $\% e$ entonces depende plenamente del valor de Δx, ya que cuanto menor sea, mejor será la aproximación.

Ejemplos.
Dadas las siguientes funciones, obtener $\Delta x, dx, \Delta y, dy$ y el $\% e$, si x se modifica de acuerdo a los valores indicados:

1) $y = x^2 - 3x - 2$, si x pasa de 1 a 1.1
Solución:
$\Delta x = x_2 - x_1 = 1.1 - 1 = 0.1$
$dx = \Delta x = 0.1$
$\Delta y = y_2 - y_1 = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - 2 - (x^2 - 3x - 2)$
$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 2 - x^2 + 3x + 2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x$
Sustituyendo $x = 1, \Delta x = 0.1$:
$\Delta y = 2(1)(0.1) + (0.1)^2 - 3(0.1) = 0.2 + 0.01 - 0.3 = -0.09$
Ahora, diferenciando la función: $dy = (2x - 3)dx$
Sustituyendo $x = 1, dx = 0.1$:
$dy = (2(1) - 3)(0.1) = -0.1$
Calculando el error:
$$\% e = \left| \frac{-0.09 - (-0.1)}{-0.09} \right| \cdot 100 = 11.11\% > 5\%$$
error que se considera alto.

2) $y = 4x^2 - 2x$, si x pasa de: a) 2 a 2.5, b) 2 a 2.1, c) 2 a 2.01
Solución:
a) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2.5 - 2 = 0.5$
$dx = \Delta x = 0.5$
$\Delta y = y_2 - y_1 = 4(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - (4x^2 - 2x)$
$= 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 4x^2 + 2x = 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2\Delta x$
Sustituyendo $x = 2, \Delta x = 0.5$:
$\Delta y = 8(2)(0.5) + 4(0.5)^2 - 2(0.5) = 8 + 1 - 1 = 8$
Ahora, diferenciando la función: $dy = (8x - 2)dx$
Sustituyendo $x = 2, dx = 0.5$:
$dy = (8(2) - 2)(0.5) = 7$
Calculando el error:
$$\% e = \left| \frac{8 - 7}{8} \right| \cdot 100 = 12.5\ \% > 5\%$$
error que se considera alto.

b) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2.1 - 2 = 0.1$
$dx = \Delta x = 0.1$
$\Delta y = 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2\Delta x$

Sustituyendo $x=2,\ \Delta x=0.1$:

$$\Delta y=8(2)(0.1)+4(0.1)^2-2(0.1)=1.6+0.04-0.2=1.44$$

$$dy=(8x-2)dx$$

Sustituyendo $x=2,\ dx=0.1$:

$$dy=(8(2)-2)(0.1)=1.4$$

Calculando el error:

$$\%\ e=\left|\frac{1.44-1.4}{1.44}\right|\cdot 100=2.77\ \%<3\%$$

error que se considera muy aceptable.

c) $\Delta x=x_2-x_1=2.01-2=0.01$

$$dx=\Delta x=0.01$$

$$\Delta y=8x\Delta x+4(\Delta x)^2-2\Delta x$$

Sustituyendo $x=2,\ \Delta x=0.01$:

$$\Delta y=8(2)(0.01)+4(0.01)^2-2(0.01)=0.16+0.0004-0.02=0.1404$$

$$dy=(8x-2)dx$$

Sustituyendo $x=2,\ dx=0.01$:

$$dy=(8(2)-2)(0.01)=0.14$$

Calculando el error:

$$\%\ e=\left|\frac{0.1404-0.14}{0.1404}\right|\cdot 100=0.284\ \%<3\%$$

error que se considera muy aceptable.

IV.14 APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Son muchos los campos del conocimiento en que una diferencial puede tener aplicación. En general, se utiliza para hacer cálculos aproximados del comportamiento de funciones en intervalos pequeños.

En la disciplina que se quiera, siempre que un fenómeno abstracto, físico o social pueda ser modelado por funciones, es posible efectuar aproximaciones numéricas.

Para simplificar el procedimiento, se establece en seguida la metodología para obtener el cálculo aproximado de valores requeridos.

1) El dato se toma como valor final de la variable independiente.
2) El valor más cercano conocido, se toma como el valor inicial de la variable independiente.
3) Se encuentra Δx.
4) Se modela el dato como función de x.
5) Se obtiene la diferencial de la función respecto a x.
6) Siempre que $\Delta x\approx 0$, se reemplaza dy por Δy.
7) Se despeja el valor x_1 y se sustituyen los valores para encontrar el valor buscado.

Ejemplos.
Aplicando el concepto de diferencial, hacer el cálculo aproximado de los siguientes valores:

1) $\sqrt{26}$

Solución:

Se elige el valor x_1 de la raíz más cercana $\left(y_1=\sqrt{25}=5\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1=25,\ x_2=26$

$\Rightarrow \quad \Delta x=dx=x_2-x_1=26-25=1$

se modela el valor como función: $y=\sqrt{x}$

$$\therefore \quad dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

sustituyendo: $dy=\frac{1}{2\sqrt{25}}(1)=\frac{1}{10}=0.1$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y\cong dy$

$\Delta y=y_2-y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2=y_1+\Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2=5+0.1=5.1$

Por tanto, se puede concluir que $\sqrt{26}\cong 5.1$

2) $\sqrt[3]{66}$

Solución:

Se elige el valor x_1 de la raíz más cercana $\left(y_1=\sqrt[3]{64}=4\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1=64,\ x_2=66$

$\Rightarrow \quad \Delta x=dx=x_2-x_1=66-64=2$

se modela el valor como función: $y=\sqrt[3]{x}$

$$\therefore \quad dy=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$$

sustituyendo: $dy=\frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}(2)=\frac{2}{48}=0.041666$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y\cong dy$

$\Delta y=y_2-y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2=y_1+\Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2=4+0.041666=4.041666$

Por tanto, se puede concluir que $\sqrt[3]{66}\cong 4.041666$

3) $\sqrt[5]{31}$

Solución:

Se elige el valor x_1 de la raíz más cercana $\left(y_1=\sqrt[5]{32}=2\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1=32,\ x_2=31$

$\Rightarrow \quad \Delta x=dx=x_2-x_1=31-32=-1$

se modela el valor como función: $y=\sqrt[5]{x}$

$$\therefore \quad dy=\frac{1}{5\sqrt[3]{x^4}}dx$$

sustituyendo: $dy=\frac{1}{5\sqrt[5]{(32)^4}}(-1)=-\frac{1}{80}=-0.0125$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 2 + (-0.0125) = 1.9875$

Por tanto, se puede concluir que $\sqrt[5]{31} \cong 1.9875$

4) 3.05^2

Solución:

Se elige el valor x_1 del cuadrado más cercano $\left(y_1 = 3^2 = 9\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 3,\ x_2 = 3.05$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 3.05 - 3 = 0.05$

se modela el valor como función: $y = x^2$

$\therefore \quad dy = 2x\,dx$

sustituyendo: $dy = 2(3)(0.05) = 0.3$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 9 + 0.3 = 9.3$

Por tanto, se puede concluir que $3.05^2 \cong 9.3$

5) 10.2^3

Solución:

Se elige el valor x_1 del cubo más cercano $\left(y_1 = 10^3 = 1000\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 10,\ x_2 = 10.2$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 10.2 - 10 = 0.2$

se modela el valor como función: $y = x^3$

$\therefore \quad dy = 3x^2\,dx$

sustituyendo: $dy = 3(10)^2(0.2) = 60$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 1000 + 60 = 1060$

Por tanto, se puede concluir que $10.2^3 \cong 1060$

6) $\log_{10} 10{,}007$

Solución:

Se elige el valor x_1 del logaritmo más cercano $\left(y_1 = \log_{10} 10{,}000 = 4\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 10{,}000,\ x_2 = 10{,}007$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 10{,}007 - 10{,}000 = 7$

se modela el valor como función: $y = \log_{10} x$

$$\therefore \quad dy = \frac{1}{x}\log_{10} e\,dx$$

sustituyendo: $dy = \dfrac{1}{10{,}000}(0.434294)(7) = 0.000304$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 4 + 0.000304 = 4.000304$

Por tanto, se puede concluir que $\log_{10} 10{,}007 \cong 4.000304$

7) $\ln 2.7$

Solución:

Se elige el valor x_1 del logaritmo natural más cercano $\left(y_1 = \ln e = 1\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = e = 2.718281,\ x_2 = 2.7$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 2.7 - 2.718281 = -0.018281$

se modela el valor como función: $y = \ln x$

$$\therefore \quad dy = \frac{1}{x}dx$$

sustituyendo: $dy = \frac{1}{e}\left(-0.018281\right) = -0.006725$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 1 - 0.006725 = 0.993274$

Por tanto, se puede concluir que $\ln 2.7 \cong 0.993274$

Para encontrar valores aproximados de funciones trigonométricas, conviene recordar la siguiente tabla:

	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	1	0	No definido	1	No definido
30°	0.5	0.8660	0.5773	1.7320	1.1547	2
45°	0.7071	0.7071	1	1	1.4142	1.4142
60°	0.8660	0.5	1.7320	0.5773	2	1.1547
90°	1	0	No definido	0	No definido	1

8) $\cos 62°$

Solución:

Se elige como x_1 al valor del coseno más cercano $\left(y_1 = \cos 60° = 0.5\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 60°,\ x_2 = 62°$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 62° - 60° = 2°$

transformando a radianes:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \rightarrow 2\pi\ rad \\ 2° \rightarrow \Delta x\ rad \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(2\pi\ rad)(2°)}{360°} = 0.034906\, rad$$

se modela el valor como función: $y = \cos x$

$\therefore \quad dy = -sen\, x\, dx$

sustituyendo: $dy = -0.8660\left(0.034906\right) = -0.030228$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 0.5 + \left(-0.030228\right) = 0.469771$

Por tanto, se puede concluir que $\cos 62° \cong 0.469771$

9) $sen 3°$

Solución:

Se elige como x_1 al valor del seno más cercano $\left(y_1 = sen\, 0° = 0\right)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 0°,\ x_2 = 3°$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 3° - 0° = 3°$
transformando a radianes:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \rightarrow 2\pi \; rad \\ 3° \rightarrow \Delta x \; rad \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(2\pi \; rad)(3°)}{360°} = 0.052359 \, rad$$

se modela el valor como función: $y = sen\, x \quad \therefore \quad dy = \cos x \, dx$

sustituyendo: $dy = 1(0.052359) = 0.052359$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 0 + (0.052359) = 0.052359$

Por tanto, se puede concluir que $sen 3° \cong 0.052359$

10) $\tan 44°$
Solución:
Se elige como x_1 al valor de la tangente más cercana $(y_1 = \tan 45° = 1)$ y como x_2 al valor pedido:

$\therefore \quad x_1 = 45°, x_2 = 44°$

$\Rightarrow \quad \Delta x = dx = x_2 - x_1 = 44° - 45° = -1°$
transformando a radianes:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \rightarrow 2\pi \; rad \\ -1° \rightarrow \Delta x \; rad \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{(2\pi \; rad)(-1°)}{360°} = -0.017453 \, rad$$

se modela el valor como función: $y = \tan x$

$\therefore \quad dy = \sec^2 x \, dx$

sustituyendo: $dy = (1.4142)^2(-0.017453) = -0.034906$

Como Δx es pequeño en relación al dato buscado, se puede decir que $\Delta y \cong dy$

$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad \therefore \quad y_2 = 1 + (-0.034906) = 0.965094$

Por tanto, se puede concluir que $\tan 44° \cong 0.965094$

Ejemplo.
Un móvil se mueve según la función $s = 5t^2 + t$, donde s representa la distancia recorrida medida en metros y t el tiempo medido en segundos. Determinar el desplazamiento que experimenta el móvil en el tiempo comprendido entre 7 segundos y $\left(7 + \frac{1}{3}\right)$ segundos.

Solución:

$t_1 = 7, \; t_2 = 7.333333$

$\Rightarrow \quad \Delta t = dt = t_2 - t_1 = 7.333333 - 7 = 0.333333 \, s$

diferenciando la función: $ds = (10t + 1)dt$

sustituyendo: $ds = (10(7) + 1)(0.333333) = 23.666666 \, m$

en realidad recorre algo más de esa distancia, ya que:

$s = 5(7.333333)^2 + 7.333333 - (5(7^2) + 7) = 24.222222 \, m$

por lo que se ha cometido un error de 0.555 centímetros.