LA INTEGRAL

UNIDAD V

V.1 SUCESIONES

V.1.1 DEFINICIÓN DE SUCESIÓN

Una *sucesión* es una lista de números que siguen una regla determinada:

$$\{\, a_n \} = \{\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, \cdots a_i,\, \cdots,\, a_n \;\}$$

Formalmente, las sucesiones se definen como un tipo especial de función de n cuyo dominio es el conjunto de números naturales **N**:

$$\{\, a_n \}: N \to R$$

Ejemplos de sucesiones:

1) $\{\, a_n \} = \{\, 5, 10, 15, 20, 25, \cdots \}$
2) $\{\, a_n \} = \{\, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, \cdots \}$
3) $\{\, a_n \} = \{\, 1, 2, 4, 8, 16, \cdots \}$
4) $\{\, a_n \} = \{\, 3, -3, 3, -3, 3, \cdots \}$

El término i-ésimo a_i de una sucesión es el que va acompañado de la letra que indica el valor del número en determinado término. Por ejemplo, en la primera sucesión el primer término (a_1) es 5, el segundo término (a_2) es 10, el tercer término (a_3), es 10. El término enésimo o general es a_n.

Ejemplo.
En la sucesión: $\{\, a_n \} = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots \right\}$, el término enésimo o general es: $a_n = \left\{ \frac{n}{2} \right\}$.

Para conocer los términos de una sucesión, se sustituye el valor de n desde 1 hasta el valor que se desee.

Ejemplos.
Determinar los primeros cinco términos de las siguientes sucesiones:

1) $a_n = \left\{ \dfrac{2^n}{2n-1} \right\}$

el primer término es: $\dfrac{2^1}{2(1)-1} = 2$

el segundo término es: $\dfrac{2^2}{2(2)-1} = \dfrac{4}{3}$

el tercer término es: $\frac{2^3}{2(3)-1}=\frac{8}{5}$

el cuarto término es: $\frac{2^4}{2(4)-1}=\frac{16}{7}$

el quinto término es: $\frac{2^5}{2(5)-1}=\frac{32}{9}$

Por lo tanto: $\left\{\, a_n \right\}=\left\{\, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \frac{32}{9}, \cdots \right\}$

2) $a_n=\left\{\, \frac{n}{n+1} \right\}$

el primer término es: $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

el segundo término es: $\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$

el tercer término es: $\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$

el cuarto término es: $\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$

el quinto término es: $\frac{5}{5+1}=\frac{5}{6}$

Por lo tanto: $\left\{\, a_n \right\}=\left\{\, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots \right\}$

Como se puede ver, cuando se tiene el término general es muy sencillo obtener un término determinado. Sin embargo, el caso inverso que es, dados unos pocos términos, obtener el término general, no siempre resulta fácil.

Para establecer el término general que rige a la sucesión, primero se debe analizar el comportamiento de sus componentes[1].

Ejemplos.
Obtener el término general de las siguientes sucesiones:

1) $\left\{\, a_n \right\}=\left\{ 1, 3, 5, 7, 9, \cdots \right\}$
Se aprecia que se compone por números impares, por lo que se deduce que el término general de esta sucesión es $a_n=\{2n-1\}$.

2) $\left\{\, a_n \right\}=\left\{\, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots \right\}$

[1] Para determinar el término enésimo de una sucesión es necesario conocer como mínimo cinco de sus términos.

Nótese como el denominador de cada componente es igual al numerador más uno, por lo que se conluye que el término general de esta sucesión es $a_n = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$.

3) $\left\{ a_n \right\} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \cdots \right\}$

Se advierte que el denominador de cada término crece de la forma 3^n, por lo que se deduce que el término general de esta sucesión es $a_n = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}$.

4) $\left\{ a_n \right\} = \left\{ 0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \cdots \right\}$

Analizando los numeradores, se deduce que están dados por el cuadrado de cada número natural menos uno. Similarmente, los denominadores están dados por el cuadrado de ese mismo número natural pero más la unidad. Por lo tanto, el término general de esta sucesión es $a_n = \left\{ \frac{n^2-1}{n^2+1} \right\}$.

Existen dos casos especiales de sucesiones que destacan por su importancia:

- Se define como progresión aritmética, a la sucesión que posee la propiedad de que la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre constante. Esto es, existe un número d, llamado la diferencia común, tal que $d = a_{n+1} - a_n$ para todo n.

Ejemplos.

$$\left\{ a_n \right\} = \left\{ 1, 4, 7, 10, 13, \cdots \right\} \quad d = 3$$
$$\left\{ a_n \right\} = \left\{ 10, 6, 2, -2, -6, \cdots \right\} \quad d = -4$$

- Se define como progresión geométrica, a la sucesión en la que existe un número r llamado la razón común, con la propiedad de: $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ para todo n.

Ejemplos.

$$\left\{ a_n \right\} = \left\{ 2, 10, 50, 250, 1250, \cdots \right\} \quad r = 5$$
$$\left\{ a_n \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \cdots \right\} \quad r = \frac{1}{2}$$

V.1.2 TIPOS DE SUCESIONES

- Una sucesión es *infinita* cuando tiene un número infinito de términos.

Ejemplo: $\left\{ a_n \right\} = \left\{ 1, 6, 11, 16, 21, \cdots \right\}$

- Una sucesión es *finita* cuando tiene un número determinado de términos.

Ejemplo: $\{a_n\} = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31\}$

- Una sucesión que se aproxima cada vez más a un cierto número, se llama convergente.

Ejemplo: $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$ (se acerca a cero)

- Una sucesión que no tiene límite es *divergente*.

Ejemplo: $\{a_n\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \cdots\}$ (no se acerca a ningún número)

- Una sucesión es *creciente* si cada término de la sucesión es mayor que el anterior.

Ejemplo: $\{a_n\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots\}$

- Una sucesión es *decreciente* si cada término de la sucesión es menor que el anterior.

Ejemplo: $\{a_n\} = \{1, -1, -3, -5, -7, \cdots\}$

- Una sucesión es *monótona* si es creciente o decreciente.

Ejemplos:
Monótona creciente: $\{a_n\} = \{8, 16, 24, 32, 40, \cdots\}$
Monótona decreciente: $\{a_n\} = \left\{\sqrt{25}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[4]{25}, \sqrt[5]{25}, \sqrt[6]{25}, \cdots\right\}$

- Una sucesión se dice *acotada superiormente* por un número A, si $A \geq a_n$.

Ejemplo: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \cdots\right\}$ (está acotada por $A = 1$, ya que $1 \geq a_n$).

- Una sucesión se dice *acotada inferiormente* por un número A, si $A \leq a_n$.

Ejemplo: $\{a_n\} = \left\{\frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{9}, \frac{3}{10}, \cdots\right\}$ (está acotada por $A = 0$, ya que $0 \leq a_n$).

- Una sucesión se dice *acotada* si está acotada superior e inferiormente.

Ejemplo: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots\right\}$ (está acotada ya que $0 \leq a_n < 1$).

V.1.3 LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Encontrar el límite de una sucesión es un problema que consiste en determinar a qué número, si es que existe, se aproximan sus términos.

Por ejemplo, en la sucesión $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$, cuyo término general, evidentemente es $a_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ al aumentar n, a_i está cada vez más próximo a cero.

Esto es: $a_{10} = \frac{1}{10} = 0.1$; $a_{100} = \frac{1}{100} = 0.01$; $a_{10000} = \frac{1}{10000} = 0.0001$.

A pesar de que ningún término de la sucesión llega a valer cero, el límite es cero.

Formalmente, Se dice que un número L es el límite de una sucesión, de término general a_n, si la diferencia en valor absoluto entre a_n y L es menor que un número cualquiera, ε , previamente elegido. Expresado matemáticamente esto es: $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

Existen propiedades conocidas de límites de sucesiones:

1. Toda sucesión acotada y monótona es convergente.
2. El límite de una sucesión cuyo término general es k^n es ∞ .
3. El límite de una sucesión cuyo término general es $\dfrac{1}{k^n}$ es 0
4. El límite de una sucesión cuyo término general es n^k es 0, donde $0 < n < 1$
5. El límite de una sucesión cuyo término general es n^k es ∞ , donde $n > 1$
6. El límite de una sucesión cuyo término general es un polinomio siempre es divergente. Su limite es $+\infty$, cuando el coeficiente del termino de mayor grado es positivo, y $-\infty$, cuando es negativo.
7. El límite de una suma o diferencia de sucesiones es respectivamente la suma o diferencia de los límites de cada una de ellas.
8. El límite de un producto o cociente de sucesiones es el producto o cociente de los límites de cada una de ellas.
9. Cualquier progresión aritmética es divergente.

Algunas veces, al calcular el límite de una sucesión se obtiene una indeterminación $\left(\dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, \dfrac{0}{0}, 0(\infty), 0^0, \infty^0\right)$. En este caso se tienen que efectuar operaciones que no alteren la expresión a fin de deshacer (en su caso) la indeterminación.

Ejemplos.
Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

1) $\left\{a_n\right\} = \left\{\dfrac{7}{2}, \dfrac{13}{4}, \dfrac{25}{8}, \dfrac{49}{16}, \dfrac{97}{32}, \cdots\right\}$

Solución.

El término general es $a_n = \left\{3 + \dfrac{1}{2^n}\right\}$, lo que implica que cada número es cada vez más parecido a 3, por lo que ese es el límite de la sucesión.

2) $\left\{a_n\right\} = \left\{-4, -8, -12, -16, -20, \cdots\right\}$

Solución.

El término general es $a_n = \left\{-4n\right\}$, lo que significa que la sucesión es decreciente y no acotada, así que el límite de la sucesión es $-\infty$, es decir, es divergente.

3) $a_n = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$

Solución.

Expresando sus términos: $\left\{ a_n \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ \cdots \right\}$. Se observa como el cociente tiende a la unidad, por lo que el límite de la sucesión es 1.

4) $a_n = \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\}$

Solución.

Expresando sus términos: $\left\{ a_n \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \cdots \right\}$. Se puede advertir como los números son cada vez más pequeños, por lo tanto, el límite de la sucesión es 0.

5) $\left\{ a_n \right\} = \left\{ 2, 5, 8, 11, 14, \cdots \right\}$

Solución.

Como el término general es $a_n = \left\{ -1 + 3n \right\}$, la sucesión es creciente y no acotada, por lo que el límite de la sucesión es ∞, es decir, es divergente.

6) $a_n = \left\{ (-2)^n \right\}$

Solución.

Expresando sus términos: $\left\{ a_n \right\} = \left\{ -2, 4, -8, 16, -32, 64, \cdots \right\}$. Se aprecia claramente como el signo de los números son alternados (sucesión oscilante), por lo tanto, la sucesión es divergente y su límite no existe.

V.2 SERIES

V.2.1 DEFINICIÓN DE SERIE

Una serie es la suma de los elementos de una sucesión. La suma puede ser finita o infinita. Los elementos de las series pueden ser números, letras o una combinación de ambas. Una serie puede representarse de dos formas:

- Enlistando los elementos con los signos entre los elementos.
- Usando la llamada notación sigma (Σ), que implica la sumatoria de todos los elementos, con sólo el término general y el rango de la suma indicada.

Ejemplo.

Las siguientes expresiones representan la misma serie:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$$

$$s_n = \sum_{n=1}^{10} (-1)^{n+1}\ n$$

Se define como *serie infinita* a la suma de los términos de la sucesión:

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i + \cdots + a_n + \cdots$$

en términos prácticos, se denota como $s_n = \sum a_n$.

Una serie *finita* se define como: $s_n = \sum_{n=1}^{i} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i$

Ejemplos.

1) Dada la sucesión infinita: $\{ a_n \} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots \right\}$

$$s_n = \sum a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

2) Dada la sucesión finita: $a_n = \{ -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20 \}$

$$s_n = \sum_{n=1}^{8} a_n = (-15) + (-10) + (-5) + 0 + 5 + 10 + 15 + 20$$

Ejemplos.
Determinar la suma aproximada de las siguientes sucesiones:

1) $s_n = \sum a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$

$\therefore \quad s_n = \sum a_n \cong 0.33333 + 0.11111 + 0.03703 + 0.01234 + .00411 \cong 0.49794$

2) $s_n = \sum a_n = (-6) + (-2) + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$

$\therefore \quad s_n = \sum a_n = 48$

De forma similar que en las sucesiones, las principales áreas de interés de las series son:

i. La determinación del término general de las series.
ii. Obtener, si existe, la suma de la serie.

VI.2.2 CONVERGENCIA DE UNA SERIE

En general, una serie:

- Es *convergente*, si la sucesión asociada de las sumas parciales representadas por S_n converge. El elemento S_n en la sucesión se define como la suma de los primeros n términos de la serie. Es decir que $\lim S_n$ existe y es finito. En otras palabras, la suma es un número real.

- Es *divergente*, si el $\lim S_n$ no existe. Es decir cuando la suma tiende a ∞ ó $-\infty$.

- Es *oscilante* cuando no es ninguna de las anteriores.

Toda serie de términos positivos es convergente o divergente, pero nunca oscilante, En una serie, si se altera arbitrariamente el orden de los términos, descomponiendo arbitrariamente cada uno de los sumandos, no se altera su carácter, ni varía su suma.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Esto quiere decir, que si los términos se acercan a cero, la serie es convergente.

De lo anterior, se puede deducir que todas las *series de incrementos constantes*[2], son divergentes.

Una *serie geométrica* tiene la forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, donde a es un escalar fijo (número real)[3].

Una serie de este tipo converge si $|r|<1$ y la suma es $S_n = \frac{a}{1-r}$.

Si $|r|\geq 1$, la serie geométrica diverge.

Ejemplos.

Determinar la naturaleza de las siguientes series:

1) $s_n = \sum \frac{10}{3^n}$

Solución:

$$s_n = \frac{10}{3} + \frac{10}{9} + \frac{10}{27} + \frac{10}{81} + \frac{10}{243} + \frac{10}{729} + \cdots$$
$$\cong 3.33333 + 1.11111 + 0.37037 + 0.12345 + 0.04115 + 0.01371 + \cdots$$

$\cong 4.99314$, por lo tanto, la serie es convergente, cuya suma es 5.

2) $s_n = \sum \frac{n}{n+1}$

Solución:

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \cdots$$
$$\cong 0.5 + 0.66666 + 0.75 + 0.8 + 0.83333 + 0.85714 + \cdots$$

Como los términos no tienden a 0, la serie es divergente.

3) $s_n = \sum \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}$

Solución:

$$s_n = 4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \frac{64}{625} + \frac{128}{3125} + \cdots$$
$$\cong 4 + 1.6 + 0.64 + 0.256 + 0.1024 + 0.04096 + \cdots$$

$\cong 6.63936$, por lo tanto, la serie es convergente, cuya suma es $\frac{20}{3}$.

---

[2] En esta serie el primer término es a_1 y los demás, se obtienen sumando aritméticamente al número precedente, otro denominado d . Obsérvese el paralelismo con la definición de progresión aritmética vista en la sección VI.1.1.

[3] En esta serie el primer término es a y los demás se obtienen multiplicando al número precedente por una razón r . Obsérvese el paralelismo con la definición de progresión geométrica vista en la sección VI.1.1.

4) $s_n = \sum \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

Solución:

$s_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{6}{\sqrt{37}} + \cdots$

$\cong 0.70710 + 0.89442 + 0.94868 + 0.97014 + 0.98058 + 0.98639 + \cdots$

Como los términos tienden a 1 y no a 0, la serie es divergente.

5) $s_n = \sum (-5+6n)$

Solución:

$s_n = 1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 + \cdots$

Se trata de una serie de incrementos constantes con $a_1 = -5$ y $d = 6$, por lo tanto, la serie es divergente.

6) $s_n = \sum 5\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Solución:

Se trata de una serie geométrica. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la serie es convergente, cuya suma es:

$s_n = -\frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \frac{80}{81} - \frac{160}{343} \cdots$

$s_n = \frac{5}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$

7) $s_n = \sum 3(-2)^n$

Solución:

Se trata de una serie geométrica. Como $|r| = 2 > 1$, la serie es divergente.

V.3 SUMA DE RIEMANN

Sea un intervalo cerrado $[a,b]$, al conjunto de puntos $P_n = \{ x_o, x_1, x_2, \cdots, x_n \}$ contenidos en dicho intervalo se le conoce como *partición* del intervalo $[a,b]$.

Esto implica que: $x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_{i-1} < x_i$ donde $i = 1,2,3,4,\cdots n$

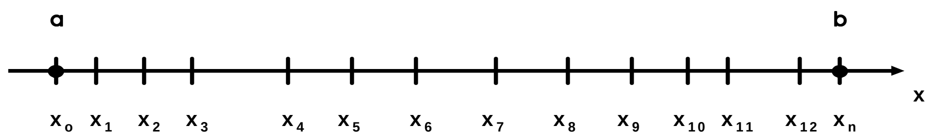
A cada subintervalo se le conoce como *celda*. A la distancia entre los puntos extremos de cada celda se le conoce como *amplitud de la celda*.

La amplitud de la primera celda es: $\Delta_1 x = x_1 - x_0$

La amplitud de la segunda celda es: $\Delta_2 x = x_2 - x_1$

La amplitud de la tercera celda es: $\Delta_3 x = x_3 - x_2$

Gráficamente:



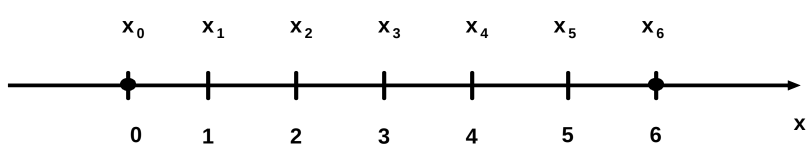
Como se puede advertir, la amplitud de las celdas viene dado por la diferencia de sus valores finales e iniciales. Por lo tanto, en general, la amplitud de cada celda viene dada por:

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

A la mayor amplitud de las celdas de una partición se le denomina *norma de la partición* y se le denota por $\|\Delta\|$.

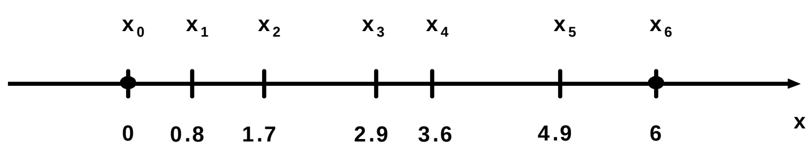
Ejemplo.
Dado el intervalo $[0,6]$, efectuar dos particiones diferentes de seis celdas y en cada caso determinar cuál es su norma.

Solución.
a) Si se hace una partición de igual amplitud:



$\Delta_1 x = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1$
$\Delta_2 x = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$
$\Delta_3 x = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1$
$\Delta_4 x = x_4 - x_3 = 4 - 3 = 1$
$\Delta_5 x = x_5 - x_4 = 5 - 4 = 1$
$\Delta_6 x = x_6 - x_5 = 6 - 5 = 1$
$\therefore$ su norma es $\|\Delta\| = 1$

b) Se hace una partición de la manera que se indica:



$\Delta_1 x = x_1 - x_0 = 0.8 - 0 = 0.8$
$\Delta_2 x = x_2 - x_1 = 1.7 - 0.8 = 0.9$
$\Delta_3 x = x_3 - x_2 = 2.9 - 1.7 = 1.2$
$\Delta_4 x = x_4 - x_3 = 3.6 - 2.9 = 0.7$
$\Delta_5 x = x_5 - x_4 = 4.9 - 3.6 = 1.3$
$\Delta_6 x = x_6 - x_5 = 6 - 4.9 = 1.1$
$\therefore$ la norma de esta partición es $\|\Delta\| = 1.3$

Sea una función $y = f(x)$ definida y limitada en un conjunto D. Considérese una partición en dicho conjunto que contenga n subintervalos.

Si se escoge un punto ξ en cada subintervalo de la partición de forma tal que:

$\xi_1 \in [x_0, x_1]$		o bien:	$x_0 \le \xi_1 \le x_1$
$\xi_2 \in [x_1, x_2]$		o bien:	$x_1 \le \xi_2 \le x_2$
$\xi_3 \in [x_2, x_3]$		o bien:	$x_2 \le \xi_3 \le x_3$

y en general:

$\xi_i \quad \in \quad [x_{i-1}, x_i]$ o bien: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$

Si se forma la suma de productos del valor de f en cada punto ξ por la amplitud de la celda respectiva, se tendrá:

$$f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x + \cdots + f(\xi_i)\Delta_i x + \cdots + f(\xi_n)\Delta_n x$$

que en forma concentrada se puede representar como:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

expresión que se conoce como *Suma de Riemann*.

Esta expresión calcula la suma de cada una de las bases (las celdas, Δx) por su respectiva altura (que son las $f(\xi)$) de una función, dada una partición. Esto determina la suma de las áreas de los rectángulos formados.

Ejemplo.

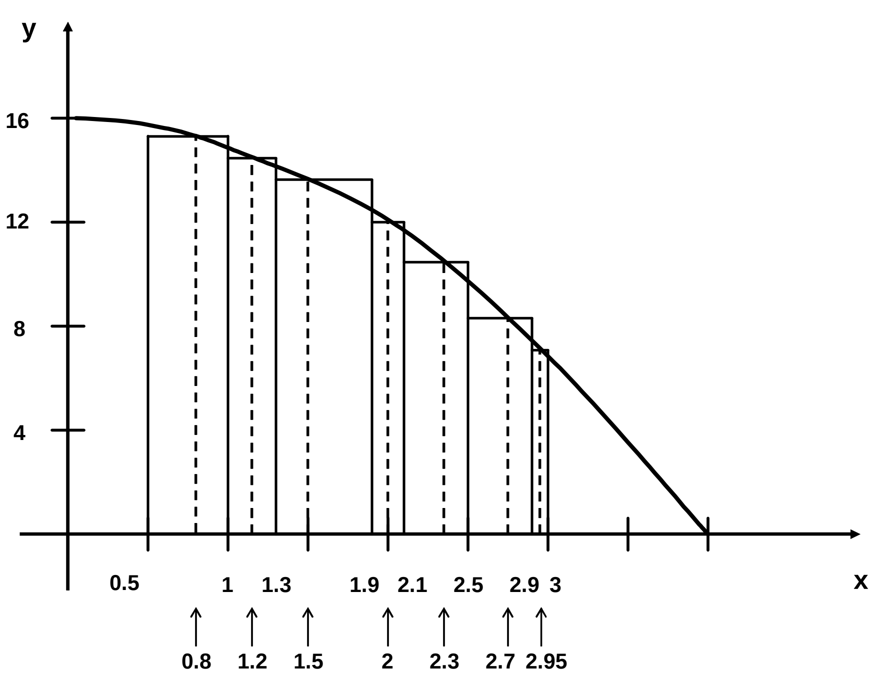
Dada la función $y = -x^2 + 16$ con $0.5 \leq x_1 \leq 3$, obtener la suma de Riemann para la función dada la partición: $x_0 = 0.5, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1.3, \quad x_3 = 1.9, \quad x_4 = 2.1, \quad x_5 = 2.5, \quad x_6 = 2.9, \quad x_7 = 3$

Solución:

Los puntos elegidos de cada celda son:

$\xi_1 = 0.8, \quad \xi_2 = 1.2, \quad \xi_3 = 1.5, \quad \xi_4 = 2, \quad \xi_5 = 2.3, \quad \xi_6 = 2.7, \quad \xi_7 = 2.95$

Graficando se tiene:



La suma de Riemann es:

$$\sum_{i=1}^{7} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x + f(\xi_5)\Delta_5 x + f(\xi_6)\Delta_i x + f(\xi_7)\Delta_7 x$$

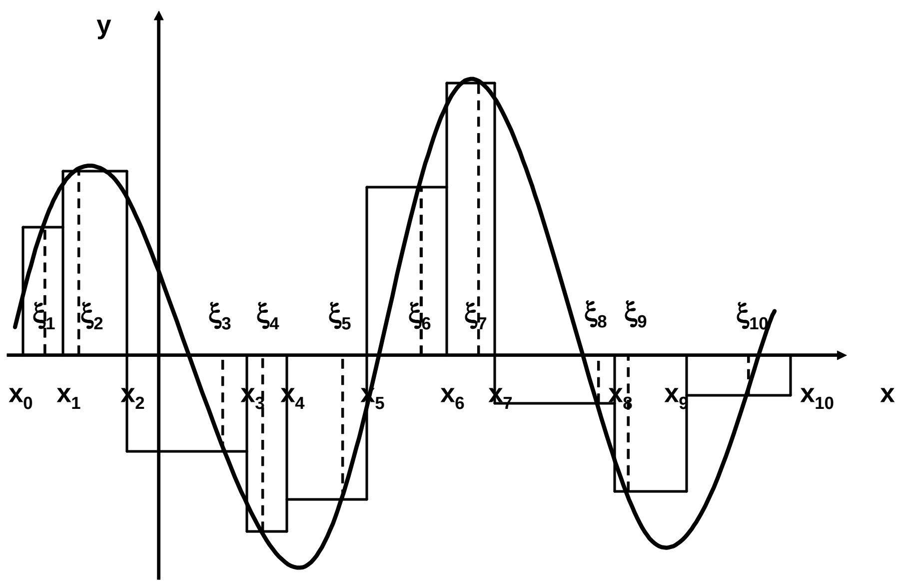
$$= f(0.8)(1-0.5) + f(1.2)(1.3-1) + f(1.5)(1.9-1.3) + f(2)(2.1-1.9) + f(2.3)(2.5-2.1) + f(2.7)(2.9-2.5) + f(2.95)(3-2.9)$$

$$= 15.36(0.5) + 14.56(0.3) + 13.75(0.6) + 12(0.2) + 10.71(0.4) + 8.71(0.4) + 7.29(0.1)$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{7} f(\xi_i)\Delta_i x = 31.195$$

y $\|\Delta\| = 0.6$.

En el caso siguiente:



se aprecia que algunas de las áreas son negativas, por lo tanto, la interpretación geométrica de la suma de Riemann es:

$$\sum_{i=1}^{10} f(\xi_i)\Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}$$

puesto que $f(\xi_3),\ f(\xi_4),\ f(\xi_5),\ f(\xi_8),\ f(\xi_9),\ f(\xi_{10})$ son números negativos.

V.4 INTEGRAL DEFINIDA

Si f es una función definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la integral definida de f de a a b se define como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \quad \text{(si el límite existe)}$$

$f(x)$ se llama integrando.

a y b son los extremos o límites de integración (a es el extremo inferior y b es el extremo superior)

$\int$ se llama signo de integración.

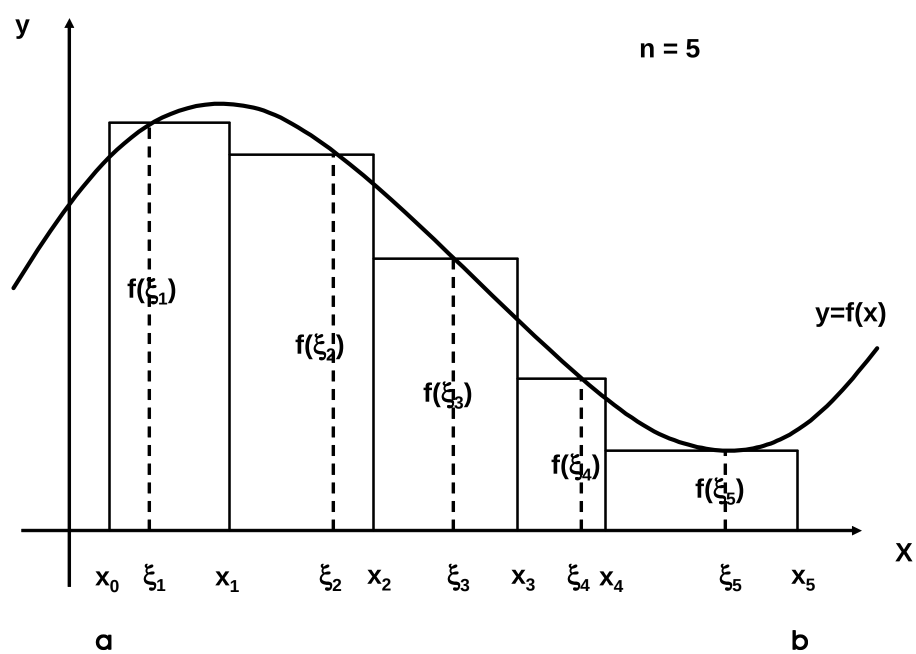
Si $\|\Delta\| \to 0$ implica que $n \to \infty$, por lo tanto:

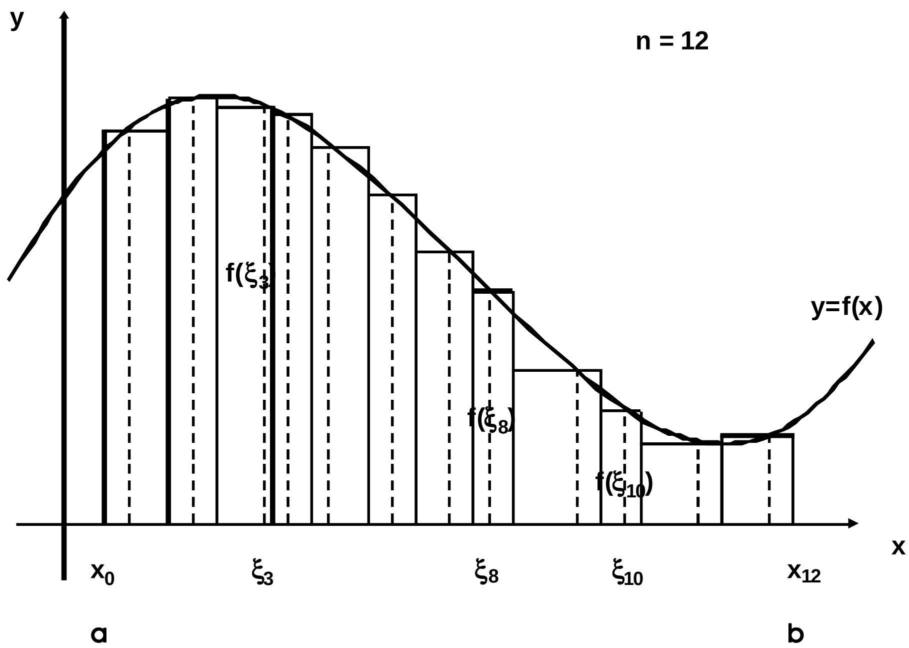
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

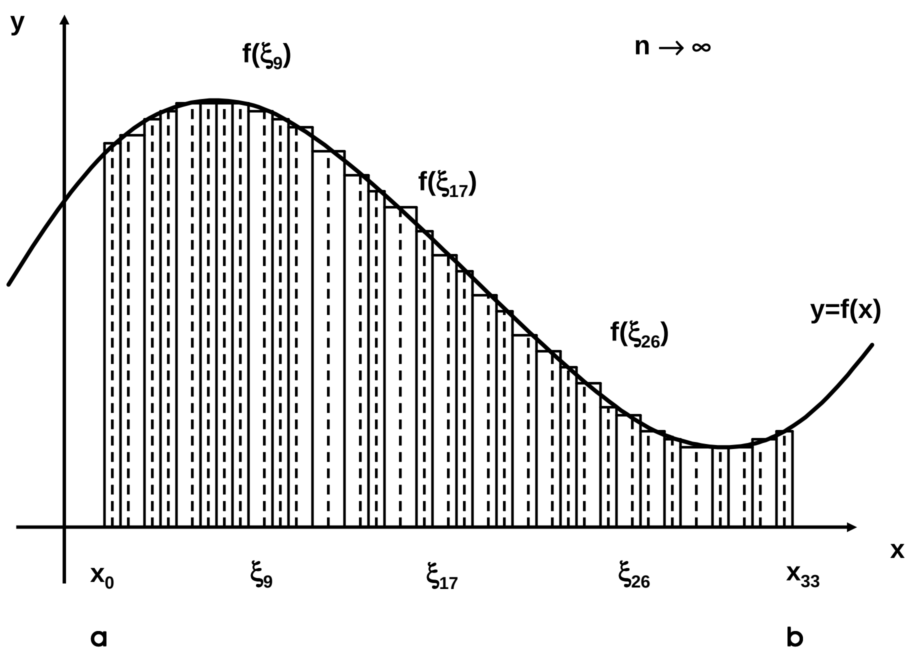
V.5 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$ representa la suma de los n rectángulos. Si la norma de la partición tiende a cero implica que el número de celdas se incrementa, es decir que cada vez se tienen más y más rectángulos que se aproximan al área real bajo la curva.

Por lo tanto, por definición: *la integral definida es el área bajo la curva en sus límites*.





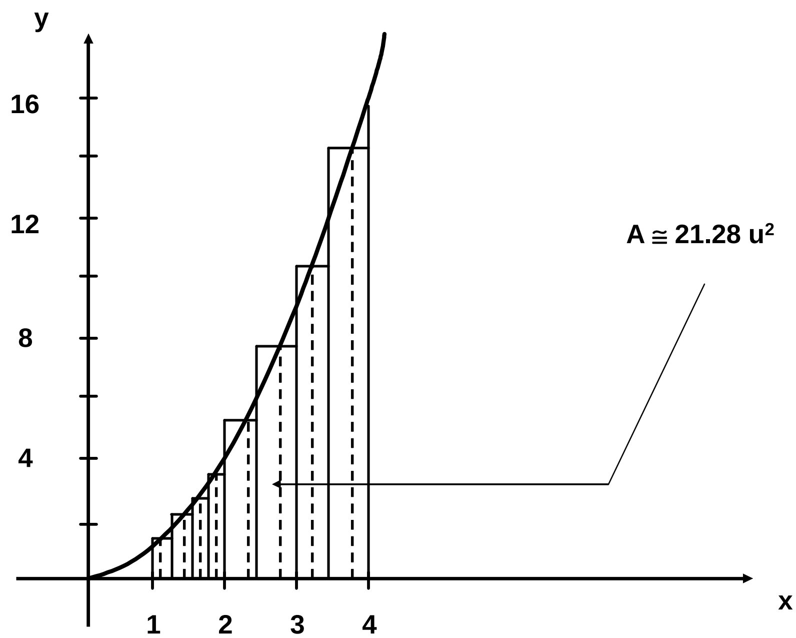


Las figuras anteriores muestran como la suma de rectángulos se aproxima al área real bajo la curva si $n \to \infty$.

Ejemplo.

Obtener $\int_1^4 x^2\,dx$ en forma aproximada utilizando una partición de ocho celdas.

Solución.
Efectuando la partición:
$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.25, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 1.75, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 2.5, \quad x_6 = 3, \quad x_7 = 3.5, \quad x_8 = 4$
los puntos elegidos de cada celda son:
$\xi_1 = 1.1, \quad \xi_2 = 1.3, \quad \xi_3 = 1.6, \quad \xi_4 = 1.8, \quad \xi_5 = 2.4, \quad \xi_6 = 2.8, \quad \xi_7 = 3.25, \quad \xi_8 = 3.75$
graficando se tiene:



$$\int_1^4 x^2\, dx = f(1.1)[1.25-1] + f(1.3)[1.5-1.25] + f(1.6)[1.75-1.5] + f(1.8)[2-1.75] + f(2.4)[2.5-2] +$$
$$f(2.8)[3-2.5] + f(3.25)[3.5-3] + f(3.75)[4-3.5]$$
$$= 1.21(0.25) + 1.69(0.25) + 2.56(0.25) + 3.24(0.25) + 5.76(0.5) + 7.84(0.5) + 10.5625(0.5) + 14.0625(0.5)$$
$$\therefore \int_1^4 x^2\, dx \cong 21.28\, u^2.$$

V.6 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo de integración $[a,b]$ y k una constante cualquiera:

1) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x) dx$

3) $\int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)dx$

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ cuando $a < c < b$

V.7 INTEGRAL INDEFINIDA O ANTIDERIVADA

Una función F será antiderivada, o primitiva, de otra función f en un intervalo $[a,b]$ si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en el intervalo.
Esto es, si $F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x)$

Ejemplo.
Sea $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 10x$. Eso implica: $f'(x) = 15x^2 + 24x - 10$
La antiderivada de esta función es la función original $f(x)$. Esto significa que:

$$\int (15x^2 + 24x - 10)\,dx = 5x^3 + 12x^2 - 10x$$

La función $f(x)$ tiene una antiderivada particular $[a,b]$ que es $F(x)$.
La antiderivada general de $f(x)$ es:

$$F(x) + C$$

donde C es una constante.

Ejemplo.
Sea $f(x) = 9x^2 + 7x - 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 18x + 7$
$\int (18x + 7)\,dx = 9x^2 + 7x + C$

V.8 FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE INTEGRACIÓN

Si $u,\ v,\ w$ tres funciones de x y a una constante cualquiera. Las 27 fórmulas fundamentales de integración son:

1) $\int du = u + C$

2) $\int (u \pm v \pm w)\,dx = \int u\ dx \pm \int v\ dx \pm \int w\ dx$

3) $\int a u\ du = a\int u\ du$

4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

5) $\int sen\, u\ du = -\cos u + C$

6) $\int \cos u\, du = sen\, u + C$

7) $\int \tan u\, du = \ln\left|\sec u\right| + C$

8) $\int \cot u\, du = \ln\left|sen\, u\right| + C$

9) $\int \sec u\, du = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + C$

10) $\int \csc u\, du = \ln\left|\csc u - \cot u\right| + C$

11) $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$

12) $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

13) $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

14) $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

15) $\int e^u\, du = e^u + C$

16) $\int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + C$

17) $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad (a > 0,\, a \neq 1)$

18) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = sen^{-1}\frac{u}{a} + C$

19) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

20) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

21) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

22) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

23) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$

24) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

25) $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2}a^2 sen^{-1}\frac{u}{a} + C$

26) $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$

27) $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

V.9 INTEGRALES DIRECTAS E INTEGRALES QUE REQUIEREN CAMBIO DE VARIABLE

Una integral directa es aquella que se adapta exactamente al integrando con una de las fórmulas fundamentales. Sin embargo, la gran mayoría no son directas, por tanto, antes de integrar se debe completar la diferencial du para adaptarla a una fórmula, lo que obliga a hacer intervenir una constante que multiplique y divida a la integral. En seguida, se extrae de la integral a la constante que no haga falta para completar la diferencial du tal y como lo indica la fórmula número 3.

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales inmediatas:

1) $\int dx = x + C$

2) $\int 4\,dx = 4x + C$

3) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

4) $\int 8x^5\,dx = \frac{8x^6}{6} + C$

5) $\int \left(12x^5 + 13x^4 - 11x^3 - 10x^2 + 7x - 8\right)dx = \frac{12x^6}{6} + \frac{13x^5}{5} - \frac{11x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 8x + C$

6) $\int \frac{2}{x^4}\,dx = \int 2x^{-4}dx = \frac{2x^{-3}}{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$

7) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

8) $\int \sqrt[11]{x^7}\,dx = \int x^{\frac{7}{11}}dx = \frac{x^{\frac{18}{11}}}{\frac{18}{11}} + C = \frac{11}{18}\sqrt[11]{x^{18}} + C$

9) $\int \frac{-9}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx = \int \frac{-9}{x^{\frac{5}{3}}}\,dx = \int -9x^{-\frac{5}{3}}dx = \frac{-9x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C = \frac{27}{2x^{\frac{2}{3}}} + C = \frac{27}{2\sqrt[3]{x^2}} + C$

10) $\int \left(\frac{x^3 - 5x^2 - 4}{x^2}\right)dx = \int \left(x - 5 - \frac{4}{x^2}\right)dx = \int \left(x - 5 - 4x^{-2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + C$

$= \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{4}{x} + C$

11) $\int \left(\frac{4x^3 - 10x^2 - 16x - 14}{2x^5}\right)dx = \int \left(2x^{-2} - 5x^{-3} - 8x^{-4} - 7x^{-5}\right)dx$

$$=\frac{2x^{-1}}{-1}-\frac{5x^{-2}}{-2}-\frac{8x^{-3}}{-3}-\frac{7x^{-4}}{-4}+C=-\frac{2}{x}+\frac{5}{2x^2}+\frac{8}{3x^3}+\frac{7}{4x^4}+C$$

12) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{(1+x)^2}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C$

$$=2\sqrt{x}+\frac{4\sqrt{x^3}}{3}+\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+C$$

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales efectuando cambio de variable:

13) $\int (x^3+2)^2\,3x^2\,dx \qquad u=x^3+2 \quad\Rightarrow\quad du=3x^2\,dx$

$$\Rightarrow\int u^2\,du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x^3+2)^3}{3}+C$$

14) $\int \frac{8x^4}{(x^5+6)^7}dx \qquad u=x^5+6 \quad\Rightarrow\quad du=5x^4\,dx$

$$\Rightarrow\frac{8}{5}\int\frac{du}{u^7}=\frac{8}{5}\int u^{-7}du=\left(\frac{8}{5}\right)\frac{u^{-6}}{-6}+C=\frac{8}{-30u^6}=-\frac{8}{30(x^5+6)^6}+C$$

15) $\int (x^3+2)^{\frac{1}{2}}\,x^2\,dx \qquad u=x^3+2 \quad\Rightarrow\quad du=3x^2\,dx$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\left(\frac{1}{3}\right)\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2\sqrt{(x^3+2)^3}}{9}+C$$

16) $\int \frac{8x^2}{(x^3+17)^3}dx \qquad u=x^3+17 \quad\Rightarrow\quad du=3x^2\,dx$

$$\Rightarrow\frac{8}{3}\int\frac{du}{u^3}=\frac{8}{3}\int u^{-3}du=\left(\frac{8}{3}\right)\frac{u^{-2}}{-2}+C=\frac{8}{-6u^2}=-\frac{4}{3(x^3+17)^2}+C$$

17) $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}dx \qquad u=x^2+6x \quad\Rightarrow\quad du=(2x+6)\,dx$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}du=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}+C$$

18) $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx$

$$=\int (x^2-2x^4)^{\frac{1}{2}}\,dx=\int\left[x^2(1-2x^2)\right]^{\frac{1}{2}}dx=\int x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$u=1-2x^2 \quad\Rightarrow\quad du=-4x\,dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{-4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \left(\frac{1}{-4}\right)\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2\sqrt{\left(1-2x^2\right)^3}}{12} + C$$

19) $\int sen\ 4x\ dx$

$u = 4x \quad \Rightarrow \quad du = 4\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int sen\ u\ du = -\frac{1}{4}\cos u + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C$$

20) $\int \cos\frac{1}{2}x\ dx$

$u = \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{2}\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}}\int \cos u\ du = 2\ sen\ u + C = 2\ sen\ \frac{1}{2}x + C$$

21) $\int \tan 5x\ dx$

$u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\int \tan u\ du = \frac{1}{5}\ln\left|\sec u\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\sec 5x\right| + C$$

22) $\int x\cot x^2\ dx$

$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \cot u\ du = \frac{1}{2}\ln\left|sen\ u\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|sen\ x^2\right| + C$$

23) $\int \sec 11x\ dx$

$u = 11x \quad \Rightarrow \quad du = 11\,dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{11}\int \sec u\ du = \frac{1}{11}\ln\left|\sec u + \tan u\right| + C = \frac{1}{11}\ln\left|\sec 11x + \tan 11x\right| + C$$

24) $\int 7x\csc 10x^2\ dx$

$u = 10x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 20x\ dx$

$$\Rightarrow \frac{7}{20}\int \csc u\ du = \frac{7}{20}\ln\left|\csc u - \cot u\right| + C = \frac{7}{20}\ln\left|\csc 10x^2 - \cot 10x^2\right| + C$$

25) $\int \sec^2 8x\ dx$

$u = 8x \quad \Rightarrow \quad du = 8\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int \sec^2 u\ du = \frac{1}{8}\tan u + C = \frac{1}{8}\tan 8x + C$$

26) $\int 5x\sec 7x^2\ \tan 7x^2\ dx$

$u = 7x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 14x\ dx$

$\Rightarrow \frac{5}{14}\int \sec u \tan u \, du = \frac{5}{14}\sec u + C = \frac{5}{14}\sec 7x^2 + C$

27) $\int 17w^3 \csc 13w^4 \cot 13x^4 \, dw$

$u = 13w^4 \quad \Rightarrow \quad du = 52w^3 \, dw$

$\Rightarrow \frac{17}{52}\int \csc u \cot u \, du = -\frac{17}{52}\csc u + C = -\frac{17}{52}\csc 13w^4 + C$

28) $\int 15k^6 \csc^2 4k^7 \, dk$

$u = 4k^7 \quad \Rightarrow \quad du = 28k^6 \, dk$

$\Rightarrow \frac{15}{28}\int \csc^2 u \, du = -\frac{15}{28}\cot u + C = -\frac{15}{28}\cot 4k^7 + C$

29) $\int 10 \, e^{5x} \, dx$

$u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5 \, dx$

$\Rightarrow \frac{10}{5}\int e^u \, du = 2e^u + C = 2e^{5x} + C$

30) $\int \frac{1}{19}\cos 6x \, e^{sen\, 6x} \, dx$

$u = sen\, 6x \quad \Rightarrow \quad du = 6\cos 6x \, dx$

$\Rightarrow \frac{1}{19(6)}\int e^u \, du = \frac{1}{114}e^u + C = \frac{1}{114}e^{sen\, 6x} + C$

31) $\int \frac{13}{9}x^4 e^{10x^5} \, dx$

$u = 10x^5 \quad \Rightarrow \quad du = 50x^4 \, dx$

$\Rightarrow \frac{13}{9(50)}\int e^u \, du = \frac{13}{450}e^u + C = \frac{13}{450}e^{10x^5} + C$

32) $\int \frac{2x^2}{3+6x^3} \, dx$

$u = 3 + 6x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 18x^2 \, dx$

$\Rightarrow \frac{2}{18}\int \frac{du}{u} = \frac{2}{18}\ln|u| + C = \frac{2}{18}\ln\left|3+6x^3\right| + C$

33) $\int \frac{sen\, 5x}{\cos 5x} \, dx$

$u = \cos 5x \quad \Rightarrow \quad du = -5sen\, 5x \, dx$

$\Rightarrow -\frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{5}\ln|u| + C = -\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$

34) $\int \frac{3\left(8x+11x^2\right)^2(8+22x)}{\left(8x+11x^2\right)^3} \, dx$

$u = \left(8x+11x^2\right)^3 \quad \Rightarrow \quad du = 3\left(8x+11x^2\right)^2(8+22x)\, dx$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\left(8x+11x^2\right)^3\right| + C$$

35) $\int 5^{6x}\ dx$

$u = 6x \quad \Rightarrow \quad du = 6\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\int 5^u\ du = \frac{1}{6}\frac{5^u}{\ln 5} + C = \frac{1}{6}\frac{5^{6x}}{\ln 5} + C$$

36) $\int 3x^8\ 9^{17x^9}\ dx$

$u = 17x^9 \quad \Rightarrow \quad du = 153x^8\ dx$

$$\Rightarrow \frac{3}{153}\int 9^u\ du = \frac{3}{153}\frac{9^u}{\ln 9} + C = \frac{3}{153}\frac{9^{17x^9}}{\ln 9} + C$$

37) $\int \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$

$a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2; \quad u^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$

$$\Rightarrow 6\int \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}} = 6sen^{-1}\frac{u}{2} + C = 6sen^{-1}\frac{x}{2} + C$$

38) $\int \frac{-9}{16+25x^2}\ dx$

$a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4; \quad u^2 = 25x^2 \quad \Rightarrow \quad u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5\ dx$

$$\Rightarrow -\frac{9}{5}\int \frac{du}{4^2+u^2} = -\frac{9}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\tan^{-1}\frac{u}{4} + C = -\frac{9}{20}\tan^{-1}\frac{5x}{4} + C$$

39) $\int \frac{15x}{x^2\sqrt{x^4-81}}\ dx$

$a^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad a = 9; \quad u^2 = x^4 \quad \Rightarrow \quad u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\ dx$

$$\Rightarrow \frac{15}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-9^2}} = \frac{15}{2}\left(\frac{1}{9}\right)\sec^{-1}\frac{u}{9} + C = \frac{15}{18}\sec^{-1}\frac{x^2}{9} + C$$

40) $\int \frac{10x^2}{49x^6-36}\ dx$

$a^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad a = 6; \quad u^2 = 49x^6 \quad \Rightarrow \quad u = 7x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 21x^2\ dx$

$$\Rightarrow \frac{10}{21}\int \frac{du}{u^2-6^2} = \frac{10}{21}\left(\frac{1}{2(6)}\right)\ln\left|\frac{u-6}{u+6}\right| + C = \frac{10}{252}\ln\left|\frac{7x^3-6}{7x^3+6}\right| + C$$

41) $\int \frac{x^3}{x^8-10}\ dx$

$a^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{10}; \quad u^2 = x^8 \quad \Rightarrow \quad u = x^4 \quad \Rightarrow \quad du = 4x^3\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2-\left(\sqrt{10}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{10}\right)}\right)\ln\left|\frac{u-\sqrt{10}}{u+\sqrt{10}}\right| + C = \frac{1}{8\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{10}}{x^4+\sqrt{10}}\right| + C$$

42) $\int \frac{9x^5}{49-4x^{12}}\,dx$

$a^2=49 \quad \Rightarrow \quad a=7; \quad u^2=4x^{12} \quad \Rightarrow \quad u=2x^6 \quad \Rightarrow \quad du=12x^5\,dx$

$\Rightarrow \frac{9}{12}\int \frac{du}{7^2-u^2}=\frac{9}{12}\left(\frac{1}{2(7)}\right)\ln\left|\frac{7+u}{7-u}\right|+C=\frac{9}{168}\ln\left|\frac{7+2x^6}{7-2x^6}\right|+C$

43) $\int \frac{-3x^4}{\sqrt{4+x^{10}}}\,dx$

$a^2=4 \quad \Rightarrow \quad a=2; \quad u^2=x^{10} \quad \Rightarrow \quad u=x^5 \quad \Rightarrow \quad du=5x^4\,dx$

$\Rightarrow -\frac{3}{5}\int \frac{du}{\sqrt{2^2+u^2}}=-\frac{3}{5}\ln\left|u+\sqrt{u^2+2^2}\right|+C=-\frac{3}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}+4}\right|+C$

44) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{sen^2\ x-25}}\,dx$

$a^2=25 \quad \Rightarrow \quad a=5; \quad u^2=sen\ ^2x \quad \Rightarrow \quad u=sen\ x \quad \Rightarrow \quad du=\cos x\,dx$

$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2-5^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2-5^2}\right|+C=\ln\left|sen\ x+\sqrt{sen^2\ x-25}\right|+C$

45) $\int \sqrt{100-64x^2}\,dx$

$a^2=100 \quad \Rightarrow \quad a=10; \quad u^2=64x^2 \quad \Rightarrow \quad u=8x \quad \Rightarrow \quad du=8\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{8}\int \sqrt{10^2-u^2}=\frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{2}\right)u\sqrt{10^2-u^2}+\frac{1}{2}(10)^2 sen^{-1}\frac{u}{10}\right)+C$

$=\frac{8x}{16}\sqrt{100-64x^2}+\frac{100}{16}sen^{-1}\frac{8x}{10}+C$

46) $\int \sqrt{3x^2+5}\,dx$

$a^2=5 \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{5}; \quad u^2=3x^2 \quad \Rightarrow \quad u=\sqrt{3}x \quad \Rightarrow \quad du=\sqrt{3}\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sqrt{u^2+5^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)u\sqrt{u^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{1}{2}(5)\ln\left|u+\sqrt{u^2+5}\right|\right)+C$

$=\frac{x}{2}\sqrt{3x^2+5}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+5}\right|+C$

47) $\int \sqrt{x^2-36}\,dx$

$a^2=36 \quad \Rightarrow \quad a=6; \quad u^2=x^2 \quad \Rightarrow \quad u=x \quad \Rightarrow \quad du=dx$

$\Rightarrow \int \sqrt{u^2-6^2}=\frac{1}{2}u\sqrt{u^2-6^2}-\frac{1}{2}\left(6^2\right)\ln\left|u+\sqrt{u^2-6^2}\right|+C$

$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-36}-18\ln\left|x+\sqrt{x^2-36}\right|+C$

V.10 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. REGLA DE BARROW

Si $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y si $g(x)$ cumple que $\frac{dg(x)}{dx} = f(x)\ \forall x\ [a,b]$ entonces, el *teorema fundamental del cálculo*[4] establece que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Expresión conocida como *Regla de Barrow*.

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales:

1) $\int_1^3 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=1}^{x=3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \cong 8.66$

2) $\int_{-2}^{5} \left(6x^3 - 8x^2 + 7x - 2\right) dx = \left.\frac{6}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x\right|_{x=-2}^{x=5}$

$= \left[\frac{6}{4}(625) - \frac{8}{3}(125) + \frac{7}{2}(25) - 2(5)\right] - \left[\frac{6}{4}(16) - \frac{8}{3}(-8) + \frac{7}{2}(4) + 2(-2)\right]$

$= 937.5 - 333.33 + 87.5 - 10 - 24 - 21.33 - 14 + 4 \cong 626.33$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx = sen\, x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = sen\,\frac{\pi}{4} - sen\,0 = 0.7071 - 0 = 0.7071$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\, x \cos^2 x\, dx$

Con cambio el variable:

$u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -sen\, x\, dx$

se cambian los límites de integración: $u_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0; \quad u_2 = \cos 0 = 1$

$= \frac{1}{-1}\int_1^0 u^2\, du = -\left.\frac{u^3}{3}\right|_{u=1}^{u=0} = \left(-\frac{0^3}{3}\right) - \left(-\frac{1^3}{3}\right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Comprobando (sin cambio de variable):

$= -\left.\frac{\cos^3 x}{3}\right|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{0^3}{3}\right) - \left(-\frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$

La integral indefinida de la función continua $y = f(x)$, formalmente se define como:

$$\int_a^x F(x)\,dx + C$$

[4] La demostración de los teoremas expuestos en los Subtemas VI.10 y VI.11 pueden consultarse en el capítulo 7 del libro *Cálculo con Geometría Analítica* de Protter y Morrey incluido en la bibliografía.

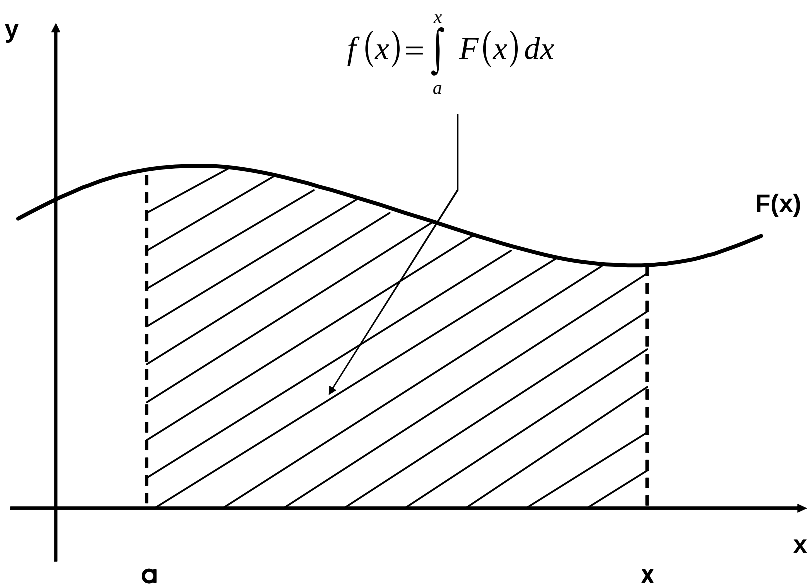
Ejemplo.
Sea $F(x)=6x+8$

$$\int_{-3}^{x} F(x)\,dx=\int_{-3}^{x}(6x+8)\,dx=\frac{6}{2}x^2+8x\Big|_{-3}^{x}=3x^2+8x-\left(3(-3)^2+8(-3)\right)=3x^2+8x-3$$

$\therefore \quad f(x)=3x^2+8x-3$

$$\frac{df(x)}{dx}=6x+8=F(x)$$

Esto significa que la integral indefinida , es una *integral definida con extremo superior variable*.
Gráficamente:



Finalmente, a partir de lo anterior, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x F(x)\,dx=F(x)$$

y

$$\int \underbrace{\frac{d}{dx}F(x)\ dx}_{dF(x)}=F(x)+C$$

pero por definición de diferencial: $dF(x)=\dfrac{d}{dx}F(x)dx$

$$\therefore \quad \int dF(x)=F(x)+C$$

El teorema fundamental del cálculo establece que la diferenciación y la integración son operaciones inversas.
Los símbolos $\int$ y d son operadores inversos.

V.11 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$; m es el mínimo absoluto que ocurre en x_m; M es el máximo absoluto que ocurre en x_M. Es decir:

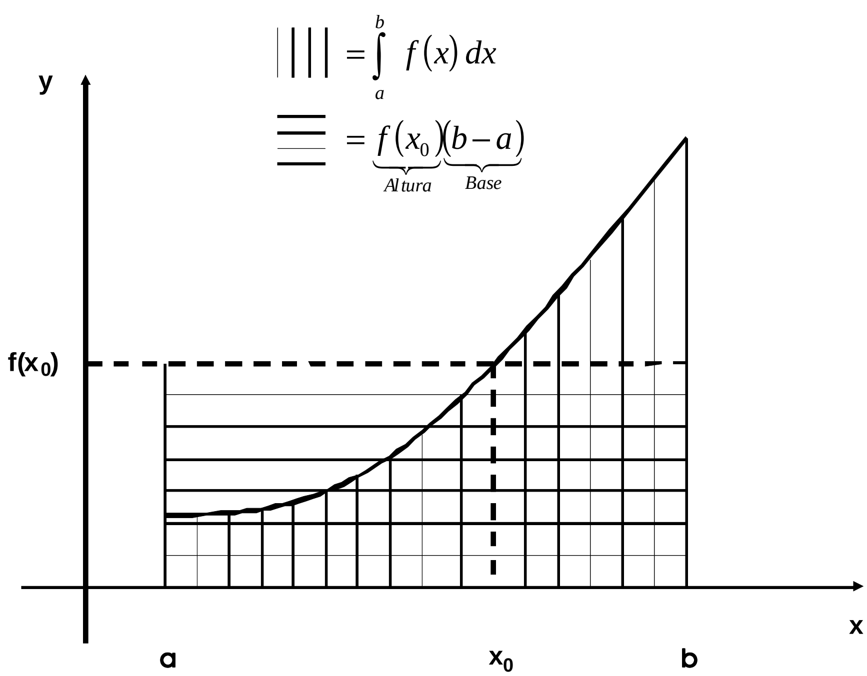
$$f(x_m) = m \qquad a \le x_m \le b$$
$$f(x_M) = M \qquad a \le x_M \le b$$
$$m \le f(x) \le M \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

$\therefore$ existe un número $x_0 \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a) \qquad a \le x_0 \le b, \quad m \le f(x_0) \le M$$

La igualdad $\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$ se interpreta que, en toda función continua, el área bajo la curva siempre podrá ser igual al área de un rectángulo que tenga como base la amplitud del intervalo de definición de la función y como altura el valor de la función en algún punto del intervalo.

Gráficamente esto es:



Ejemplo.
Obtener x_0 de la función $y = 3x^2$ en el intervalo $1 \le x \le 2$.

Solución.

$$\int_1^2 3x^2\ dx = x^3\Big|_{x=1}^{x=2} = 8-1=7$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral: $7 = f(x_0)(2-1) \quad \Rightarrow \quad f(x_0)=\frac{7}{2-1}=7$

despejando x de la función: $x=\sqrt{\frac{y}{3}} \quad \therefore \quad x_0=\sqrt{\frac{7}{3}}\cong 1.5275$.

V.12 INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean dos funciones u y v derivables de x, y considerando la regla para obtener la diferencial de un producto:

$$d(u\cdot v)=u\cdot dv+v\cdot du \quad \Rightarrow \quad u\cdot dv=d(u\cdot v)-v\cdot du$$

$$\int u\cdot dv=\int d(u\cdot v)-\int v\cdot du$$

$$\Rightarrow \quad \int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

El integrando se separa en dos partes. Una de ellas se iguala a u y la otra a dv (por eso se llama método de integración por partes). Se deben considerar dos aspectos:

1) La parte que se iguala a dv debe ser fácilmente integrable.
2) $\int v\cdot du$ no debe ser más complicada que $\int u\cdot dv$

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes:

1) $\int x e^x\ dx$

$$u=x \quad \Rightarrow \quad du=x, \quad dv=e^x dx \quad \Rightarrow \quad v=e^x$$

$$\therefore \quad \int x e^x\ dx = x e^x - \int e^x\ dx = x e^x - e^x + C$$

2) $\int x\, sen\, x\, dx$

$$u=x \quad \Rightarrow \quad du=dx, \quad dv=sen\, x\, dx \quad \Rightarrow \quad v=-\cos x$$

$$\therefore \quad \int x\, sen\, x\, dx=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\int \cos x\, dx=-x\cos x+sen\, x+C$$

3) $\int x\sqrt{1+x}\ dx$

$$u=x \quad \Rightarrow \quad du=dx, \quad dv=\sqrt{1+x}\, dx=(1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx \quad \Rightarrow \quad v=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad \int x\sqrt{1+x}\ dx = x\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-\int\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}}+C$$

$$=\frac{2x}{3}\sqrt{(1+x)^3}-\frac{4}{15}\sqrt{(1+x)^5}+C$$

4) $\int sen^2\ x\, dx$

$$\int sen^2\ x\, dx=\int sen\, x\, sen\, x\, dx$$

$u = sen\,x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x\,dx, \quad dv = sen\,x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$

$\therefore \quad \int sen\,x\,sen\,x\,dx = sen\,x(-\cos x) - \int (-\cos x)(\cos x)\,dx = -sen\,x\cos x + \int \cos^2 x\,dx$

pero se sabe que: $sen^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \therefore \quad \cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$= -sen\,x\cos x + \int (1 - sen^2 x)\,dx = -sen\,x\cos x + \int dx - \int sen^2 x\,dx$

pero la última integral es igual que la buscada, pero con signo contrario, por lo tanto:

$2\int sen^2 x\,dx = -sen\,x\cos x + x + C \quad \Rightarrow \quad \int sen^2 x\,dx = \frac{x - sen\,x\cos x}{2} + C$

5) $\int x^3 e^{2x}\,dx$

$u = x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2\,dx, \quad dv = e^{2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\Rightarrow \quad \int x^3 e^{2x}\,dx = x^3\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,3x^2\,dx = \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\underbrace{\int x^2 e^{2x}\,dx}_{integral\ por\ partes}$$

$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx, \quad dv = e^{2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\Rightarrow \quad \int x^2 e^{2x}\,dx = x^2\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,2x\,dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \underbrace{\int x\,e^{2x}\,dx}_{integral\ por\ partes}$$

$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad dv = e^{2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\Rightarrow \quad \int x\,e^{2x}\,dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\therefore \quad \int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\left[\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left(\frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)\right] + C$$

$$= \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3x^2 e^{2x}}{4} + \frac{3x\,e^{2x}}{4} - \frac{3e^{2x}}{8} + C$$

V.13 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades más usadas en la resolución de integrales trigonométricas son:

1) $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

3) $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

4) $sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

5) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

6) $sen\,x\cos x = \frac{1}{2}(sen\,2x)$

7) $2\,sen^2 \frac{1}{2}x = 1 - \cos x$

8) $2\cos^2 \frac{1}{2}x = 1 + \cos x$

9) $sen\,x\cos y = \frac{1}{2}[sen(x - y) + sen(x + y)]$

10) $sen\,x\,sen\,y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

11) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales utilizando identidades trigonométricas:

1) $\int sen^2\,x\,dx$

$$\int sen^2\,x\,dx = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen\,2x + C$$

2) $\int \cos^2 3x\,dx$

$$\int \cos^2 3x\,dx = \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{1}{2}\cos 6x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}sen\,6x + C$$

3) $\int \cos^5 x\,dx$

$$\int \cos^4 x \cos x\,dx = \int\left(\cos^2 x\right)^2 \cos x\,dx = \int\left(1 - sen^2 x\right)^2 \cos x\,dx$$

$$= \int\left(1 - 2\,sen^2 x + sen^4 x\right)\cos x\,dx = \int \cos x\,dx - 2\int sen^2 x \cos x\,dx + \int sen^4 x \cos x\,dx$$

$$= sen\,x - 2\int u^2\,du + \int u^4\,du = sen\,x - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = sen\,x - \frac{2}{3}sen^3 x + \frac{1}{5}sen^5\,x + C$$

4) $\int sen^2\,x \cos^3 x\,dx$

$$\int sen^2\,x\cos^3 x\,dx = \int sen^2\,x\left(1 - sen^2\,x\right)\cos x\,dx = \int\left(sen^2 x - sen^4 x\right)\cos x\,dx$$

$$= \int sen^2 x \cos x\,dx - \int sen^4 x \cos x\,dx = \frac{1}{3}sen^3 x - \frac{1}{5}sen^5 x + C$$

5) $\int \sec^4 2x\,dx$

$$\int \sec^4 2x\,dx = \int \sec^2 2x \sec^2 2x\,dx + \int\left(1 + \tan^2 2x\right)\sec^2 2x\,dx$$

$$= \int \sec^2 2x dx + \int \tan^2 2x \sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{6}\tan^3 2x + C$$

6) $\int sen\,2x \cos 4x\,dx$

$$\int sen\,2x\cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int\left[sen(2x - 4x) + sen(2x + 4x)\right]dx = \frac{1}{2}\int sen(-2x)dx + \frac{1}{2}\int sen\,6x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\cos(-2x)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)\left(-\cos 6x\right) + C = \frac{1}{4}\cos(-2x) - \frac{1}{12}\cos 6x + C$$

7) $\int sen\,5x\,sen\,x\,dx$

$$\int sen\,5x\,sen\,4x\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos(5x - x) - \cos(5x + x)\right]dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)sen\,4x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)\left(sen\,6x\right) + C = \frac{1}{8}sen\,4x - \frac{1}{12}sen\,6x + C$$

8) $\int \cos 3x \cos 2x\, dx$

$$\int \cos 3x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos(3x-2x)+\cos(3x+2x)]dx = \frac{1}{2}\int \cos x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 5x dx$$

$$= \frac{1}{2} sen\, x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right) sen\, 5x + C = \frac{1}{2} sen\, x + \frac{1}{10} sen\, 5x + C$$

V.14 MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Si P y Q son dos funciones polinómicas, teóricamente siempre es posible resolver integrales de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$ se dice que es una *fracción propia*, en caso contrario es una *fracción impropia*.

En la práctica, la obtención de dichas integrales depende de que sea posible factorizar el denominador $Q(x)$.

Por la naturaleza de los factores del denominador, se consideran cuatro casos:

Caso 1: *Factores lineales distintos*

A cada factor lineal $ax+b$, del denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$ siendo A una constante a determinar.

Ejemplos

1) Hallar: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$

$\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2}$, multiplicando por x^2-4 se tiene: $1 = A(x-2)+B(x+2)$

Si $x=2 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(2-2)+(2+2)B \quad \Rightarrow \quad 4B=1 \quad \Rightarrow \quad B=\dfrac{1}{4}$

Si $x=-2 \quad \Rightarrow \quad 1=(-2-2)A+B(-2+2) \quad \Rightarrow \quad -4A=1 \quad \Rightarrow \quad A=-\dfrac{1}{4}$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x-2} dx = -\frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$$

2) Hallar: $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$

$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}=\frac{x+1}{x\left(x^2+x-6\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}$, multiplicando por x^3+x^2-6x se tiene:

$x+1=A(x+3)(x-2)+B\,x(x-2)+C\,x(x+3)$

Si $x=0$: $\quad 0+1=A(0+3)(0-2)+0B+0C \quad\Rightarrow\quad -6A=1 \quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{6}$

Si $x=-3$: $\quad -3+1=0A+B(-3)(-3-2)+0C \quad\Rightarrow\quad 15B=-2 \quad\Rightarrow\quad B=-\frac{2}{15}$

Si $x=2$: $\quad 2+1=0A+0B+C(2)(2+3) \quad\Rightarrow\quad 10C=3 \quad\Rightarrow\quad C=\frac{3}{10}$

$$\therefore \quad \int\frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}=\int\frac{-\frac{1}{6}}{x}dx+\int\frac{-\frac{2}{15}}{x+3}dx+\int\frac{\frac{3}{10}}{x-2}dx=-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+\frac{3}{10}\ln|x-2|+C$$

<u>Caso 2</u>: *Factores lineales iguales*

A cada factor cuadrático de la forma $(ax+b)^n$, donde $n\geq 1$, que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma $\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}+\cdots$ siendo $A, B, C,\cdots$ constantes a determinar.

Ejemplos.

1) Obtener: $\int\frac{x\,dx}{(x-2)^2}$

$\frac{x}{(x-2)^2}=\frac{x}{(x-2)(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$

multiplicando por $(x-2)^2$ se tiene: $x=A(x-2)+B$

Si $x=2$: $\quad 2=0+B \quad\Rightarrow\quad B=2$

Si $x=0$: $\quad 0=A(-2)+2 \quad\Rightarrow\quad 2A=2 \quad\Rightarrow\quad A=1$

$\int\frac{x\,dx}{(x-2)^2}=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{2\,dx}{(x-2)^2}$

ahora, haciendo el cambio de variable para la última integral:

$u=x-2 \quad\Rightarrow\quad du=dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{2\,dx}{(x-2)^2}=2\int u^{-2}\,du$

finalmente:

$$\int\frac{x\,dx}{(x-2)^2}=\ln|x-2|+\frac{2u^{-1}}{-1}+C=\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C$$

2) Obtener: $\int\frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{3x+5}{(x+1)(x^2-2x+1)}=\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

multiplicando por x^3-x^2-x+1 se tiene: $3x+5=A(x-1)(x-1)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$

Si $x=-1$: $3(-1)+5=A(-1-1)(-1-1)+0B+0C \quad \Rightarrow \quad 4A=2 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Si $x=1$: $3(1)+5=0+0+C(1+1) \quad \Rightarrow \quad 2C=8 \quad \Rightarrow \quad C=\frac{8}{2}=4$

Si $x=0$: $3(0)+5=\frac{1}{2}(0-1)^2+B(0+1)(0-1)+4(0+1)$

$\Rightarrow \quad 5=\frac{1}{2}-B+4 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{1}{2}+4-5 \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \int\frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{1}{2}dx}{x-1}+\int\frac{4\,dx}{(x-1)^2}$. Ahora, haciendo el cambio de variable para la última integral: $u=x-1 \quad \Rightarrow \quad du=dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{4\,dx}{(x-1)^2}=\int u^{-2}\,du$

finalmente:

$$\int\frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{4u^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$$

Caso 3: *Factores cuadráticos distintos*

A cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c, que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ siendo A, B las constantes a determinar.

Ejemplos.

1) Obtener $\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$, multiplicando por x^4+3x^2+2 se tiene:

$x^3+x^2+x+2=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)$

$x^3+x^2+x+2=Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx^3+Dx^2+2Cx+2D$

$x^3+x^2+x+2=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+2C)x+B+2D$

Comparando:

$A+C=1 \quad \_(1)$

$B+D=1 \quad \_(2)$

$A+2C=1 \quad \_(3)$

$B+2D=2 \quad \_(4)$

de (1): $A=1-C$

sustituyendo en (3): $1-C+2C=1 \quad \Rightarrow \quad C=0$

$\therefore \quad A=1-0=1$

de (2): $B=1-D$,

sustituyendo en (4): $1-D+2D=2 \quad \Rightarrow \quad D=1$,

$\therefore \quad B=1-1=0$

$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx=\int \frac{1x+0}{x^2+2}dx+\int \frac{0x+1}{x^2+1}dx=\int \frac{x\,dx}{x^2+2}+\int \frac{dx}{x^2+1}$, Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera integral: $u=x^2+2 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

finalmente:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx=\frac{1}{2}\ln|u|+\tan^{-1}x+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\tan^{-1}x+C$$

2) Obtener $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx$

$\frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}=\frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$, multiplicando por x^4+4x^2+3 se tiene:

$$x^3+x^2+x+3=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3)$$

$$x^3+x^2+x+3=Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx^3+Dx^2+3Cx+3D$$

$$x^3+x^2+x+3=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+3C)x+B+3D$$

Comparando:

$A+C=1 \quad \_(1)$

$B+D=1 \quad \_(2)$

$A+3C=1 \quad \_(3)$

$B+3D=3 \quad \_(4)$

de (1): $A=1-C$

sustituyendo en (3): $1-C+3C=1 \quad \Rightarrow \quad C=0$

$\therefore \quad A=1-0=1$

de (2): $B=1-D$,

sustituyendo en (4): $1-D+3D=3 \quad \Rightarrow \quad D=1$,

$\therefore \quad B=1-1=0$

$\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx=\int \frac{1x+0}{x^2+3}dx+\int \frac{0x+1}{x^2+1}dx=\int \frac{x\,dx}{x^2+3}+\int \frac{dx}{x^2+1}$, Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera integral: $u=x^2+3 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

finalmente:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx=\frac{1}{2}\ln|u|+\tan^{-1}x+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right|+\tan^{-1}x+C$$

Caso 4: *Factores cuadráticos iguales*

A cada factor cuadrático irreducible $\left(ax^2+bx+c\right)^n$, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n factores de la forma:
$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\frac{Ex+F}{\left(ax^2+bx+c\right)^3}+\cdots$ siendo $A, B, C, D, \cdots$ constantes a determinar.

Ejemplos.

1) Obtener: $\int\frac{2x^3+x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}dx$

$\frac{2x^3+x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2}$ multiplicando por $\left(x^2+4\right)^2$ se tiene:

$2x^3+x^2+4=\left(Ax+B\right)\left(x^2+4\right)+\left(Cx+D\right)$

$2x^3+x^2+4=Ax^3+Bx^2+4Ax+4B+Cx+D=Ax^3+Bx^2+\left(4A+C\right)x+\left(4B+D\right)$

Comparando:

$A=2 \qquad \_(1)$

$B=1 \qquad \_(2)$

$4A+C=0 \qquad \_(3)$

$4B+D=4 \qquad \_(4)$

de (1): $A=2$

sustituyendo en (3): $4(2)+C=0 \quad\Rightarrow\quad C=-8$

de (2): $B=1$,

sustituyendo en (4): $4(1)+D=4 \quad\Rightarrow\quad D=0$,

$$\int\frac{2x^3+x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\int\frac{2x+1}{x^2+4}dx+\int\frac{-8x+0}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$

$$\int\frac{2x^3+x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\int\frac{2x}{x^2+4}dx+\int\frac{dx}{x^2+4}-\int\frac{8x}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx$$

Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera y última integral:

$u=x^2+4 \quad\Rightarrow\quad du=2x\,dx$ se tiene:

$$=\frac{2}{2}\int\frac{du}{u}dx-\int\frac{dx}{x^2+4}+\frac{8}{2}\int\frac{du}{u^2}$$

finalmente:

$$\int\frac{2x^3+x^2+4}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\ln|u|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-4u^{-1}+C$$

$$=\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{4}{x^2+4}+C$$

2) Obtener: $\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}dx$

$$\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+2\right)^3}$$ multiplicando por $\left(x^2+2\right)^3$ se tiene:

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=(Ax+B)\left(x^2+2\right)^2+(Cx+D)\left(x^2+2\right)+(Ex+F)$$

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=(Ax+B)\left(x^4+4x^2+4\right)+(Cx+D)\left(x^2+2\right)+Ex+F$$

$$=Ax^5+Bx^4+4Ax^3+4Bx^2+4Ax+4B+Cx^3+Dx^2+2Cx+2D+Ex+F$$

$$=Ax^5+Bx^4+(4A+C)x^3+(4B+D)x^2+(4A+2C+E)x+4B+2D+F$$

Comparando:

$A=1$ _(1)

$B=-1$ _(2)

$4A+C=4$ _(3)

$4B+D=-4$ _(4)

$4A+2C+E=8$ _(5)

$4B+2D+F=-4$ _(6)

de (1): $A=1$

sustituyendo en (3): $4(1)+C=4 \quad \Rightarrow \quad C=0$

de (2): $B=-1$,

sustituyendo en (4): $4(-1)+D=-4 \quad \Rightarrow \quad D=0$,

de (5): $E=8-4(1)-2(0)=4$,

de (6): $F=-4-4(-1)-2(0)=0$,

$$\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}dx=\int\frac{1x-1}{x^2+2}dx+\int\frac{0x+0}{\left(x^2+2\right)^2}dx+\int\frac{4x+0}{\left(x^2+2\right)^3}dx$$

$$=\int\frac{x}{x^2+2}dx-\int\frac{dx}{x^2+2}+\int\frac{4x}{\left(x^2+2\right)^3}dx$$

Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera y última integral:

$u=x^2+2 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx$ se tiene:

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}dx-\int\frac{dx}{x^2+2}+\frac{4}{2}\int\frac{du}{u^3}$$

finalmente:

$$\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}dx=\frac{1}{2}\ln|u|-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}-u^{-2}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}+C$$

Ejemplo.

Resolver la siguiente integral racional impropia:

$$\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$$

efectuando la división se tiene:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^3-x^2 & x^4-x^3-x-1 \\ & -x^4+x^3 \\ \hline & -x-1 \end{array}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx=\int\left[x+\frac{(-x-1)}{x^3-x^2}\right]dx$$

$\dfrac{-x-1}{x^3-x^2}=\dfrac{-x-1}{x^2(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}$, multiplicando por x^3-x^2 se tiene:

$-x-1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$

Si $x=1 \quad \Rightarrow \quad -1-1=0A+0B+C(1)^2 \quad \Rightarrow \quad C=-2$

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad -0-1=0A+B(0-1)+0C \quad \Rightarrow \quad -B=-1 \quad \Rightarrow \quad B=1$

Si $x=2 \quad \Rightarrow \quad -2-1=A(2)(2-1)+1(2-1)+(-2)(2)^2 \quad \Rightarrow \quad -3=2A+1-8 \quad \Rightarrow \quad A=2$

$$\therefore \quad \int\left[x+\frac{(-x-1)}{x^3-x^2}\right]dx=\int x\,dx+\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{-2}{x-1}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C$$

V.15 INTEGRALES IMPROPIAS

Una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ se denomina *impropia* si:

a) El integrando $f(x)$, tiene uno o más puntos de discontinuidad en el intervalo $a\le x\le b$

b) Por lo menos uno de los límites de integración es infinito.

a) *Integrando discontinuo*

i) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a\le x<b$ pero es discontinua en $x=b$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}dx$; es discontinua en $x=3$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{3-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0} sen^{-1}\frac{x}{3}\Bigg|_0^{3-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[sen^{-1}\frac{3-\varepsilon}{3}-sen^{-1}\frac{0}{3}\right]=sen^{-1}\frac{3}{3}-sen^{-1}0=sen^{-1}1-0=\frac{\pi}{2}$$

ii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a<x\le b$ pero es discontinua en $x=a$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_2^5\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$; es discontinua en $x=2$

$$\therefore\quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{2+\varepsilon}^5\frac{dx}{\sqrt{x-2}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{x-2}\Big|_{2+\varepsilon}^5=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{5-2}-2\sqrt{2+\varepsilon-2}\right]=2\sqrt{3}-0=2\sqrt{3}$$

iii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a\le x\le b$ pero es discontinua en $x=c$, donde $a<c<b$, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplos.

1) Calcular: $\int_0^4\frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$; presenta discontinuidad en $x=2$

$$\therefore\quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^4\frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}3\sqrt[3]{x-2}\Big|_0^{2-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0^+}3\sqrt[3]{x-2}\Big|_{2+\varepsilon}^4$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3\sqrt[3]{2-\varepsilon-2}-3\sqrt[3]{0-2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3\sqrt[3]{4-2}-3\sqrt[3]{2+\varepsilon-2}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3\sqrt[3]{\varepsilon}-3\sqrt[3]{-2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{\varepsilon}\right)=-3\sqrt[3]{-2}+3\sqrt[3]{2}=2\left(3\sqrt[3]{2}\right)=6\sqrt[3]{2}$$

2) Calcular: $\int_{-1}^8\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$; presenta discontinuidad en $x=0$

$$\therefore\quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^8\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|\right)_{0+\varepsilon}^8$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(0-\varepsilon)^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(-1)^2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(0+\varepsilon)^2}\right)=0-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(4)+0=\frac{9}{2}=4.5$$

b) *Límites de integración infinitos*

i) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a \le x \le k$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_a^k f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{k\to\infty}\int_0^k \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\bigg|_0^k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{0}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\infty}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{0}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}(0) = \frac{\pi}{4}$$

ii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $j \le x \le b$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{j\to-\infty}\int_j^b f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{j\to-\infty}\int_j^0 e^{2x}\,dx = \lim_{j\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2x}\bigg|_j^0 = \lim_{j\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2(0)} - \frac{1}{2}e^{2j}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e^{-\infty} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

iii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $j \le x \le k$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_a^k f(x)dx + \lim_{j\to-\infty}\int_j^a f(x)dx$$

siempre que <u>ambos</u> limites existan.

Ejemplo.

Calcular: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$

Utilizando el cero como referencia, es decir, integrando de 0 a ∞ y de $-\infty$ a 0, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \lim_{k\to\infty}\int_{0}^{k} \frac{dx}{1+4x^2} + \lim_{j\to-\infty}\int_{j}^{0} \frac{dx}{1+4x^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\tan^{-1}2x\bigg|_{0}^{k} + \lim_{j\to-\infty}\frac{1}{2}\tan^{-1}2x\bigg|_{j}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0\right) + \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}(-\infty)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$