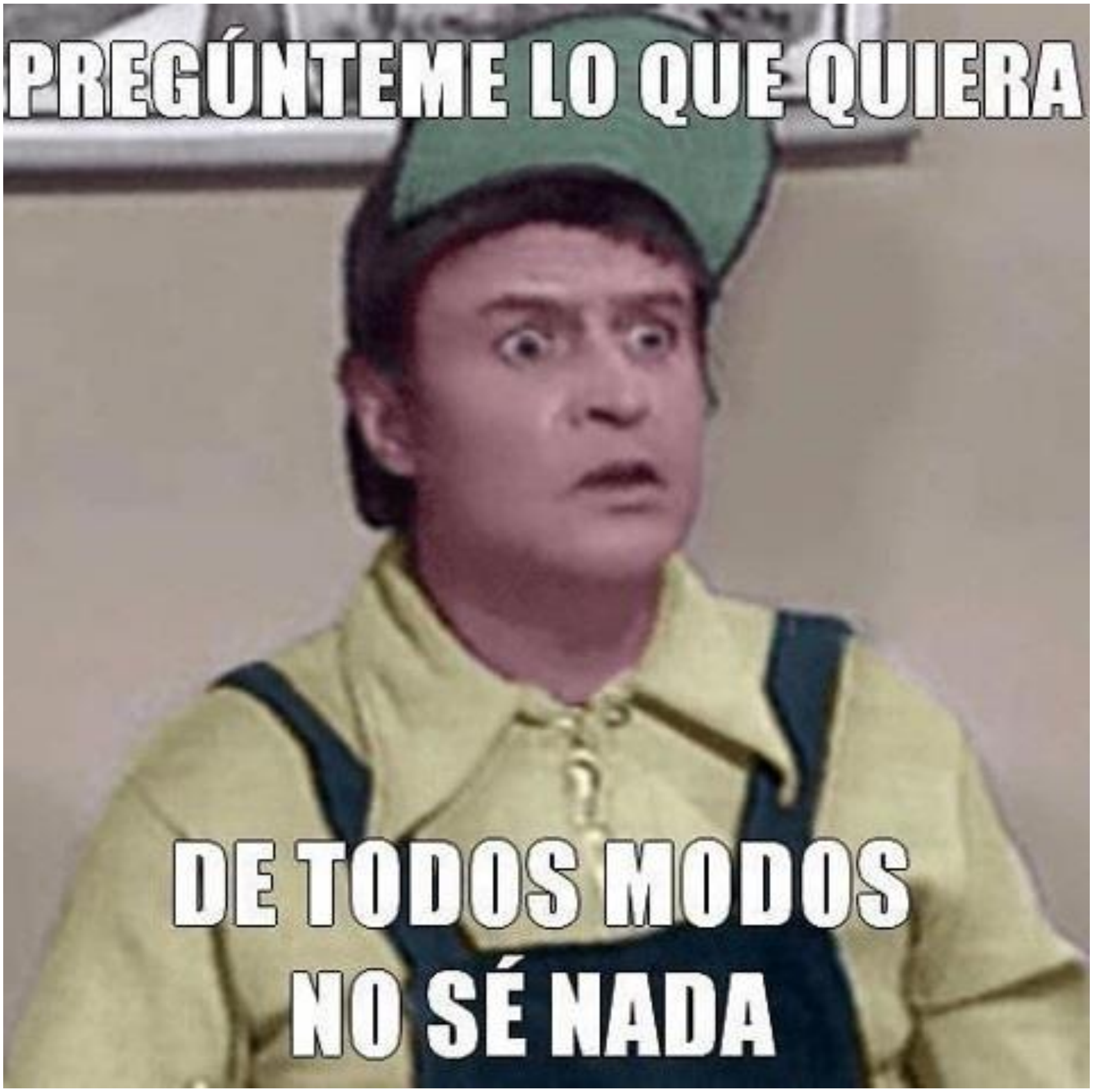
Taller de demostraciones. Sesión 2.

Elaborado por Laura Mora

Demostrar que $a(0) = 0$


PREGÚNTEME LO QUE QUIERA
DE TODOS MODOS
NO SÉ NADA

¿Recuerdas qué números conforman a los conjunto de los enteros?

$\mathbb{Z}=\{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

Vamos a revisar algunos axiomas de este conjunto.

Un axioma es una proposición que se considera «evidente» y se acepta sin requerir demostración previa.

AXIOMA 1. La suma de números enteros es conmutativa, es decir, si $a,b\in\mathbb{Z}$ entonces $a+b=b+a$

AXIOMA 2. La suma de números enteros es asociativa, es decir, si $a,b\in\mathbb{Z}$ entonces $(a+b)+c=a+(b+c)$

AXIOMA 3. Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la suma, el . Es decir, si $a\in\mathbb{Z}$ entonces $a+0=0+a=a$

AXIOMA 4. Para cada $a\in\mathbb{Z}$ existe en $\mathbb{Z}$ un inverso aditivo que se denota por $-a$. Esto es $a+(-a)=(-a)+a=0$

AXIOMA 5. El producto de números enteros es conmutativo, es decir, si $a,b\in\mathbb{Z}$ entonces $ab=ba$

AXIOMA 6. El producto en $\mathbb{Z}$ es asociativo, es decir, si $a,b,c\in\mathbb{Z}$ entonces $(ab)c=a(bc)$

AXIOMA 7. Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la multiplicación, el 1. Es decr, si $a\in\mathbb{Z}$ entonces $a1=1a=a$

AXIOMA 8. En $\mathbb{Z}$ el producto distribuye a la suma, es decir, si $a,b,c\in\mathbb{Z}$ entonces $a(b+c)=ab+ac$; $(a + b)c = ac + bc$

Cualquier conjunto de números que cumplan con estos ocho axiomas se dicen que constituyen un ***ANILLO CONMUTATIVO, CON ELEMENTO UNITARIO*** *(el 1).*

EJEMPLOS:

Sea el conjunto $A=\{a,b\}$ y vamos a definir dos operaciones llamadas + y X (suma y multiplicación) como se **muestra en la tabla siguiente:**

+	a	b	X	a	b
a	a	b	a	a	a
b	b	a	b	a	b

Demostrar que el conjunto A es un anillo.

Nota: Para verificar el axioma 6 y el 8 considera todas las ternas formadas por dos números:

$$\begin{matrix} a,a,a \\ a,a,b \\ a,b,a \\ a,b,b \end{matrix}$$

DEMOSTRACIONES BÁSICAS DEL ANILLO DE LOS ENTEROS:

Proposición 1. Si a,b y c son enteros y $a+b=a+c$, entonces $b=c$

Demostración. Supongamos que $a+b=a+c$

Según el Axioma 4, existe un entero tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$

Agregamos $-a$ a las dos cantidades:

$(-a)+a+b=(-a)+a+c$

Ahora vamos a utilizar la ropiedad asociativa (Axioma 2)

$(-a+a)+b=(-a+a)+c$

$0+b=0+c$ y como 0 es el neutro aditivo

$b=c$ Q.E.D. (esta se llama ley de la cancelación por la izquierda)

Corolario 1. Si a, b y c son enteros y $a+c=b+c$, entonces $a=b$

Demostración. Supongamos que $a+c=b+c$

Utilizando el axioma 1 $c+a=c+b$

Realizando el mismo procedimiento que la proposición 1

$(-c)+c+a=(-c)+c+b$
$(-c+c)+a=(-c+c)+b$
$0+a=0+b$
$\therefore$ a = b

Corolario 2. Si a y b son enteros y $a+b=a$, entonces $b=0$

Demostración. Por hipótesis $a+b=a+0$ pero utilizando lo ya demostrado en la proposición 1, entonces

$b=0$

Proposición 2. Para todo entero a, se tiene que $0a = 0$,

Demostración. Supongamos que $0a = 0$

Según el axioma 3 aplicando la propiedad asociativa que $0a = (0+0)a = 0a + 0a$

Pero por el corolario 2 arriba demostrado si $0a + 0a = 0a$ etonces $0a = 0$

Corolario 2. El inverso aditivo del inverso aditivo de un número entero a es a. Es decr $-(-a)=a$

Demostración. Por definición de inverso aditivo de un entero, sabemos que

$$(-a)+a=0 \quad \ldots..(1)$$

Y también que $\quad -(-a)+(-a)=0 \quad \ldots..(2)$

Por la propiedad conmutativa en (1) $\quad a+(-a)=0 \quad \ldots..(3)$

De (2) y (3) obtenemos $\quad a+(-a)=-(-a)+(-a)$

Por la propiedad de cancelación $\quad a=-(-a) \qquad$ Q.E.D.